

Министерство образования и науки Российской Федерации
Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

С.Г. Кальней

Математический анализ

Часть 1

**Дифференциальное и интегральное исчисления
функций одной и многих переменных**

Учебное пособие

Утверждено редакционно-издательским советом университета

Москва 2014

УДК 517(075.8)

К17

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук *Е.Ю. Кулькова*;
канд. физ.-мат. наук *Н.В. Островская*

Кальней С.Г.

К17 Математический анализ. Часть 1: Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной и многих переменных: учеб. пособие. – М.: МИЭТ, 2014. – 268 с.: ил.

ISBN 978-5-7256-0767-3

Часть 1 посвящена дифференциальному и интегральному исчислениям функций одной и многих переменных. Материал содержит большое количество примеров и иллюстраций.

Для студентов первого курса, обучающихся по техническим направлениям с квалификацией бакалавр, а также студентов других направлений подготовки.

ISBN 978-5-7256-0767-3

© МИЭТ, 2014

Предисловие

В действующих Федеральных государственных стандартах высшего профессионального образования требования к результатам математической подготовки образовательных программ бакалавриата сформулированы весьма общо. Кроме того, в стандартах определяется лишь общая трудоемкость изучения совокупностей предметов, отнесенных к одному циклу, но не отдельных дисциплин. Это ведёт к тому, что содержание математической подготовки и уровень требований к ней в бакалавриате приходится определять косвенно, прежде всего на основе материалов тестов, используемых при аккредитации вузов, и запросов естественных и технических дисциплин (физики, химии, электротехники и т.д.) учебного плана подготовки бакалавров. Анализ соответствующих материалов показывает, что требования к результатам математической подготовки бакалавров технических направлений по основным разделам высшей математики (аналитическая геометрия, линейная алгебра, дифференциальное и интегральное исчисления, дифференциальные уравнения, теория вероятностей, математическая статистика) во многом совпадают с требованиями подготовки специалистов (инженеров), хотя срок обучения бакалавров значительно меньше. Поэтому в математической подготовке бакалавров должно быть сохранено основное содержание курса высшей математики для инженеров в условиях существенного сокращения времени на аудиторную и самостоятельную работу в бакалавриате по сравнению со специалитетом.

При создании настоящего пособия автор пытался учесть это и ряд других обстоятельств, в частности, современное содержание и уровень математической подготовки школьников.

Часть 1 пособия рассчитана на студентов первого курса и содержит учебный материал по математическому анализу: теория пределов последовательностей и функций, непрерывность функций, дифференциальное исчисление функций одной и многих переменных, неопределённый и определённый интегралы, кратные интегралы.

При введении новых понятий значительное внимание уделяется сущности понятий, их связям с приложениями, применению к решению практических задач. Для достижения этой цели пособие содержит

много примеров и иллюстраций. Теоретический материал излагается в доступной форме. Ряд теорем формулируются и доказываются при более слабых условиях по сравнению с учебными пособиями, предназначенными для студентов-математиков. Кроме того, для некоторых сложных понятий (прежде всего длина кривой, площадь, объём фигур) не даётся строгих определений, а используются интуитивные представления читателя. Опущено строгое обоснование свойства непрерывности множества действительных чисел. Но при этом, как представляется автору, сохранена достаточная строгость и целостность изложения материала.

В конце пособия указан ряд учебников, в которых математический анализ излагается в более полном объёме.

Начало и конец доказательств теорем, следствий и решений примеров отмечены знаками ◀ и ▶ соответственно.

Автор глубоко благодарен доценту МИЭТ В.В. Лесину, внимательно прочитавшему рукопись пособия и сделавшему много ценных замечаний и предложений.

Автор искренне признателен И.В. Булаховой, затратившей много усилий и времени на подготовку рисунков и компьютерную вёрстку пособия.

1. Действительные и комплексные числа.

Функции

1.1. Действительные числа. Свойства действительных чисел

Понятие числа является одним из основных в математике и из школьного курса известно, что, начиная с древности, оно неоднократно подвергалось расширению и обобщению. В данном пособии не излагается строгая теория действительных чисел. Напоминаются лишь основные факты, обозначения, а также свойства действительных чисел.

Множество натуральных чисел $\{1, 2, 3, \dots\}$ обозначается буквой $\mathbb{N}$, а множество целых чисел $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ – $\mathbb{Z}$. Множество рациональных чисел, т.е. дробей вида $\frac{m}{n}$, где m – целое число, а n – натуральное число, обозначается буквой $\mathbb{Q}$. Множество $\mathbb{N}$ есть подмножество множества $\mathbb{Z}$, и, в свою очередь, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Рассмотрим числовую прямую, т. е. прямую, на которой отмечено начало отсчёта, – точка O , выбраны единичный отрезок OE и положительное направление от точки O к точке E .

Каждому рациональному числу соответствует единственная точка на числовой прямой. Вместе с тем не каждой точке на числовой прямой соответствует рациональное число. Например, точке A на прямой такой, что длина отрезка OA равна длине диагонали квадрата с единичной стороной, не может быть поставлено в соответствие какое-либо рациональное число. Другими словами, *не все отрезки будут иметь длину, если пользоваться только рациональными числами*. В области рациональных чисел не существует квадратных корней из чисел 2, 3 и многих других. Поэтому множество рациональных чисел необходимо расширить.

Действительными (*вещественными*) числами будем называть *бесконечные десятичные дроби*

$$\pm a_0, a_1 a_2 a_3 \dots, \quad (1.1)$$

где a_0 – целое неотрицательное число; $a_1, a_2, a_3, \dots$ – десятичные цифры 0, 1, ..., 9.

Любому рациональному числу $\frac{m}{n}$ соответствует бесконечная *периодическая* дробь вида (1.1), которую легко получить, выполняя деление числа m на n «уголком». И обратно, любая бесконечная периодическая дробь с помощью формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии может быть заменена дробью вида $\frac{m}{n}$. При этом считается, что конечная десятичная дробь $\pm a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_k$ может быть записана как бесконечная $\pm a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_k 00\dots$, а также выполняется равенство $\pm a_0, a_1 a_2 a_3 \dots (a_k - 1)99\dots = \pm a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_k 00\dots$.

Произвольная бесконечная *непериодическая* дробь вида (1.1) называется *иррациональным* числом. Иррациональными, как известно, являются числа $\sqrt{2} = 1,4142\dots$, $\pi = 3,1415\dots$. Легко привести другие примеры иррациональных чисел. Например, иррациональным числом будет непериодическая дробь 1,101001...

Далее действительные числа будут обозначаться одной буквой: a , b , α и т.д. Множество всех действительных чисел обозначается буквой $\mathbb{R}$.

Для действительных чисел вводятся отношения «равно» (=), «больше» (>) и «меньше» (<), а также операции сложения и умножения, которые удовлетворяют следующим пяти группам свойств.

1. Свойства порядка.

1.1. Для каждой пары чисел a и b выполнено одно и только одно из отношений: $a = b$, $a > b$, $a < b$ (любые два действительных числа *сравнимы* между собой).

1.2. Из отношений $a < b$ и $b < c$ следует $a < c$ (*транзитивность* отношения меньше; аналогичное свойство верно и для отношения больше).

1.3. Если $a < b$, то существует такое число c , что $a < c < b$ (свойство *плотности*).

2. Свойства сложения.

2.1. $a+b=b+a$ для любых a и b (коммутативность сложения).

2.2. $(a+b)+c=a+(b+c)$ для любых a , b и c (ассоциативность сложения).

2.3. $a+0=a$ для любого a (особая роль числа нуль).

2.4. Для каждого числа a существует такое число $-a$, что $a+(-a)=0$.

Число $-a$ называют *противоположным* данному числу. На основе этих свойств сложения может быть введена операция *вычитания*. Вычесть из числа a число b – это значит прибавить к числу a число, противоположное числу b : $a-b=a+(-b)$.

2.5. Если $a < b$, то $a+c < b+c$ для любого числа c (знак неравенства сохраняется, если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же число).

3. *Свойства умножения.*

3.1. $ab=ba$ для любых a и b (коммутативность умножения).

3.2. $(ab)c=a(bc)$ для любых a , b и c (ассоциативность умножения).

3.3. $a \cdot 1=a$ для любого a (особая роль числа один).

3.4. Для каждого числа $a \neq 0$ существует такое число $\frac{1}{a}$, что $a \cdot \frac{1}{a}=1$.

Число $\frac{1}{a}$ называют *обратным* данному числу. На основе этих свойств умножения может быть введена операция *деления*. Разделить число a на число $b \neq 0$ – это значит умножить число a на число, обратное числу b : $\frac{a}{b}=a \cdot \frac{1}{b}$.

3.5. $(a+b)c=ac+bc$ для любых a , b и c (дистрибутивность умножения относительно сложения).

3.6. Если $a < b$, то $ac < bc$ для любого числа $c > 0$ (знак неравенства сохраняется, если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число).

4. *Свойство Архимеда**. Для любого положительного числа c найдется натуральное число n такое, что $n > c$.

5. Свойство *непрерывности (полноты)*. Если последовательность действительных чисел не убывает и ограничена сверху (т.е. существует такое число, что любой член последовательности не больше этого числа), то она стремится к некоторому пределу (подробнее см. ниже пп. 2.4, 2.8).

Поясним это свойство. Пусть имеем последовательность неотрицательных чисел. Тогда целые части членов последовательности также не убывают и ограничены сверху. Поэтому, начиная с некоторого номера m_0 , целые части членов последовательности не будут меняться. Обозначим это целое неотрицательное число как α_0 . Первые десятичные знаки членов последовательности с номерами большими, чем m_0 , не убывают. Так как десятичных знаков лишь конечное число значений, то, начиная с некоторого номера $m_1 \geq m_0$, они станут принимать одно и то же значение α_1 . Рассуждая далее аналогично, получим в результате число $+\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots$, которое и будет пределом заданной последовательности.

Свойство непрерывности обеспечивает возможность установления взаимно-однозначного соответствия между множеством действительных чисел и точками *непрерывной* числовой прямой: *каждому действительному числу соответствует единственная точка на прямой и, наоборот, каждой точке соответствует единственное действительное число*. В силу этого во многих рассуждениях будут равнозначно употребляться выражения «возьмём число a » и «возьмём точку a ».

Свойство непрерывности может быть сформулировано также в следующих эквивалентных, интуитивно ясных, формах.

Пусть даны два отрезка $[a; b]$ и $[c; d]$. Если $a \leq c \leq d \leq b$, то говорят, что отрезок $[c; d]$ вложен в отрезок $[a; b]$.

Если задана последовательность вложенных друг в друга отрезков, длины которых стремятся к нулю, то существует точка, притом единственная, принадлежащая всем отрезкам одновременно. Это утверждение называется *принципом вложенных отрезков*.

* *Архимед* (ок. 287 – 212 до н.э.) – древнегреческий математик и механик.

Рассмотрим непустое числовое множество E . Если существует число a , принадлежащее множеству E , такое, что $x \leq a$ для любого $x \in E$, то число a называется *наибольшим (максимальным) элементом* (значением) множества E : $a = \max E = \max_{x \in E} x$. Аналогично, если

$a \in E$ и для любого числа $x \in E$ выполнено неравенство $x \geq a$, то a называется *наименьшим (минимальным) элементом* множества E : $a = \min E = \min_{x \in E} x$.

Если множество содержит конечное количество элементов, то в нем есть максимальный и минимальный элементы. Если множество содержит бесконечное число элементов, то оно может и не иметь максимального (минимального) элемента. Например, множество $E = (0; 1]$ не имеет минимального элемента, множество $E = [0; 1)$ – максимального, у множества $E = (0; 1)$ нет ни минимального, ни максимального элементов.

Пусть непустое множество E ограничено сверху, т.е. существует число K такое, что для любого числа $x \in E$ выполнено неравенство $x \leq K$. Число K называют *верхней границей (гранью)* множества E . Ясно, что любое число, большее K , также будет верхней границей множества E . Однако не любое число, меньшее K , также будет верхней границей множества. Число, меньшее хотя бы одного элемента из E , уже не является верхней границей множества E .

Число M , равное *наименьшей* из верхних граней множества E , называется *точной верхней гранью* множества E и обозначается $M = \sup E = \sup_{x \in E} x$ (читается «супремум»).

Оказывается, что *всякое непустое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань*. Это утверждение называют теоремой о существовании точной верхней грани у ограниченного сверху множества.

Множество рациональных чисел удовлетворяет всем свойствам 1–4-й групп. Однако оно не удовлетворяет свойству непрерывности.

Например, возьмём иррациональное число $\sqrt{2} = 1,4142\dots$. Рассмотрим возрастающую последовательность *рациональных* чисел: $x_1 = 1$, $x_2 = 1,4$, $x_3 = 1,41$ и т.д. Тогда эта последовательность не убы-

вает, ограничена сверху (например, числом 2), но *не имеет предела во множестве рациональных чисел* (её предел иррациональное число!).

Для множества чисел $E = \{1; 1,4; 1,41; \dots\}$ не существует наименьшего *рационального* числа, ограничивающего любой элемент из E .

Рассмотрим последовательность отрезков $[1; 2]$, $[1,4; 1,5]$, $[1,41; 1,42]$, $\dots$. Они вложены друг в друга, длины их стремятся к нулю. Однако если рассматривать только *рациональные* числа, принадлежащие отрезкам, то общей точки у отрезков не будет (общая точка – *иррациональное* число $\sqrt{2}$).

1.2. Понятие функции. Способы задания функции

1. Понятие функции

Понятие функции, т.е. зависимости одних переменных величин от других, также является одним из основных в математике и формировалось в течение нескольких последних столетий. Приводимое ниже определение понятия функции (точнее, числовой функции одной переменной) было сформулировано лишь в XIX веке.

Пусть задано множество D действительных чисел. Если каждому числу $x \in D$ поставлено в соответствие действительное число y , то говорят, что на множестве D задана *функция*. Переменную x называют *аргументом* или *независимой переменной*, а y – *зависимой переменной* или *функцией*.

Если правило соответствия обозначить через f , то пишут $y = f(x)$. Эта запись понимается двояко. С одной стороны, считая x произвольным из D , её понимают как обозначение функции. С другой стороны, её понимают и как указание, что определённому, фиксированному числу x поставлено в соответствие определённое число y .

Для обозначения функции могут применяться и другие буквы, например: $y = g(x)$, $y = F(x)$, $s = \varphi(t)$.

В математическом анализе изучаются также функции, когда одному значению независимой переменной x ставится в соответствие несколько (даже может быть бесконечное число) значений y . Такие функции называют *многозначными*, в отличие от определенной выше

однозначной функции. В дальнейшем мы будем рассматривать однозначные функции. Случаи рассмотрения многозначных функций будут оговариваться особо.

Множество D называется *областью определения* функции, а множество всех значений y , которые принимает функция, когда переменная x пробегает все значения из D , называют *множеством* (или *областью*) *значений* функции f . Часто его обозначают $E(f)$. Запись $f : A \rightarrow B$ означает, что область определения функции f есть множество A , а значения функции принадлежат множеству B , при этом $E(f) \subset B$, но не обязательно $E(f) = B$.

Областью определения заданной функции может быть вся числовая прямая, интервал, отрезок, совокупность непересекающихся интервалов, множество только натуральных чисел и т.д.

Пусть на плоскости задана система координат, например прямоугольных (декартовых). *Графиком функции* $y = f(x)$ называют множество точек плоскости с координатами $(x, f(x))$, где x пробегает все значения из области определения. График может быть как непрерывной, так и разрывной кривой, а также набором отдельных точек на плоскости, например, когда областью определения функции является множество натуральных чисел.

Далее везде, если не оговорено особо, графики функций изображаются в прямоугольных координатах.

2. Способы задания функции

Часто применяется *аналитический способ*, при котором функция задаётся формулой, определяющей алгебраические операции и арифметические действия, которые нужно выполнить над переменной x и, возможно, постоянными числами, чтобы получить значение y . Например,

$$s = \pi r^2, \quad y = 3 \log_2(x^2 + 2x + 2), \quad y = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0, \\ x + 1, & x > 0 \end{cases} \quad (\text{рис.1.1}).$$

Если функция задана формулой и область определения не указана, то за область определения функции (называемую *естественной областью определения*) принимают множество всех значений переменной, при которых формула имеет смысл. Например, естественной областью

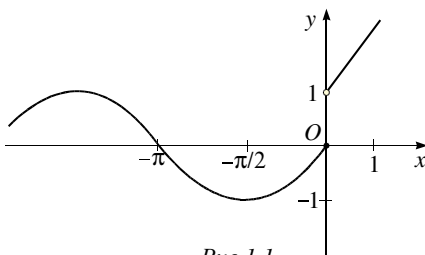


Рис.1.1.

определения функции

$f(x) = \sqrt{1-2x}$ будет множество всех чисел, удовлетворяющих неравенству $1-2x \geq 0$, т.е. полупрямая $x \leq 1/2$.

Часто используются табличный и графический способы задания функции.

При *табличном* способе функция задаётся в виде таблицы, в которой для каждого значения переменной x из некоторого дискретного множества поставлено в соответствие значение y . Табличный способ обычно используется для записи результатов экспериментов, наблюдений. Например, в таблице записаны результаты ежедневных, в течение недели, измерений температуры воздуха в 12 часов дня.

x	1 июня	2 июня	3 июня	4 июня	5 июня	6 июня	7 июня
y	22°	23°	25°	21°	20°	18°	21°

При *графическом* способе зависимость между переменными выражается в виде множества точек на плоскости с заданной системой координат, например прямоугольных. Так как мы рассматриваем только однозначные функции, то в случае прямоугольных координат никакие две точки не должны лежать на одной прямой, параллельной оси ординат. Поэтому рис.1.2 задаёт графически некоторую однозначную функцию, а рис.1.3 – нет.

Каждый из способов задания функции имеет достоинства и недостатки.

Графический способ позволяет легко устанавливать ряд свойств функции – промежутки возрастания или убывания, наличие максимумов или минимумов и другие, но не позволяет *точно* вычислить для выбранного значения независимой переменной соответствующее *значение* зависимой переменной.

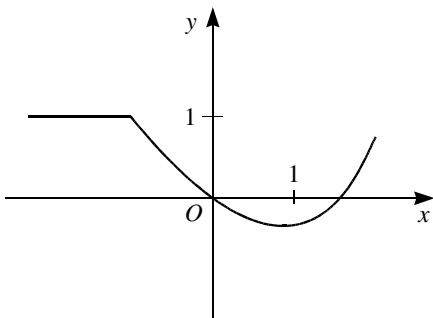


Рис.1.2.

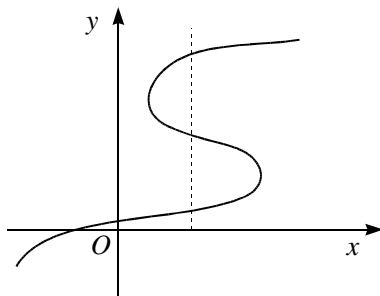


Рис.1.3.

Аналитическое задание функции позволяет для значений x точно находить соответствующее значение y , но может потребовать значительных усилий по установлению её промежутков монотонности, точек экстремума. Например, из рис.1.2 легко указать (хотя бы и приближённо) промежутки монотонности, точки максимума и минимума функции, а их нахождение даже для такой простой функции как $y = \log_2(x^2 + 2x + 2)$ требует усилий.

Табличный способ позволяет легко находить значения функции для выбранного значения аргумента, но, особенно для больших таблиц, сложно определить, например, наличие максимумов и минимумов.

Поэтому важно уметь решать следующие задачи: 1) для функции, заданной аналитически, указать её свойства и построить график; 2) для функции, заданной графически, найти её аналитическое задание, т.е. найти такую формулу, чтобы график функции, заданной найденной формулой, совпадал с изображённой на рисунке кривой; 3) для функции, заданной таблично, найти такую формулу, чтобы значения функции, заданной найденной формулой, для значений аргумента из таблицы совпадали с табличными значениями y . Методам решения данных задач будет посвящена значительная часть пособия.

3. Сложная функция

Пусть переменная y зависит от переменной u : $y = f(u)$. Если переменная u сама зависит от некоторой переменной x , т.е. $u = g(x)$, то зависимость переменной y от переменной x , заданную выражением

$y = f(g(x))$, называют *сложной функцией*, полученной *суперпозицией* или *композицией* функций f и g . Например, функцию $y = \sqrt{1-2x}$ можно записать как сложную, полагая $y = \sqrt{u}$ и $u = 1-2x$.

Сложная функция $y = f(g(x))$ определена для тех значений x , для которых числа $g(x)$ принадлежат области определения функции f .

4. Обратная функция

Если зависимость $y = f(x)$ рассматривать как уравнение относительно x , то, решив его относительно x , получим новую зависимость $x = f^{-1}(y)$, которую называют *обратной зависимостью* к f или *обратной функцией*. Более точно понятие обратной функции формулируется так. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве D и $E(f)$ – множество её значений. Обратной к функции $y = f(x)$ называется такая функция $x = f^{-1}(y)$, которая определена на множестве $E(f)$ и каждому числу $y \in E(f)$ ставит в соответствие то число x , для которого $y = f(x)$. Таким образом, выполняется тождество $y \equiv f(f^{-1}(y))$ на множестве $E(f)$.

Обратная функция может быть многозначной. Например, из уравнения $y = x^2$ для $y > 0$ находим два значения $x = \pm\sqrt{y}$, обладающих требуемым свойством: $y = (\pm\sqrt{y})^2$.

Для того чтобы обратная к $y = f(x)$ функция была однозначной, необходимо и достаточно, чтобы $f(x_1) \neq f(x_2)$ при $x_1 \neq x_2$.

Достаточным условием однозначности обратной функции является требование строгой монотонности прямой функции. Если функция $y = f(x)$ задана на некотором промежутке и не является строго монотонной на нём, то обычно из области определения выделяют такой промежуток, на котором функция $y = f(x)$ является *строго монотонной* и для этой, вообще говоря, новой функции определяют обратную однозначную функцию.

Пример 1.1. Функция $y = x^2$ строго возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. Поэтому на этом промежутке она имеет однозначную обратную функцию, заданную равенством $x = \sqrt{y}$. Если же функцию $y = x^2$ рассматривать на промежутке $(-\infty; 0]$, то обратной будет функция $x = -\sqrt{y}$.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет однозначную обратную функцию $x = f^{-1}(y)$. Графики этих функций в прямоугольной системе координат Oxy совпадают, меняются только назначения осей: для прямой функции $y = f(x)$ осью аргументов является ось абсцисс Ox , для обратной $x = f^{-1}(y)$ – ось ординат Oy . Если же и для обратной функции аргументы располагать на оси Ox , то графики прямой функции и её обратной будут симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (рис.1.4).

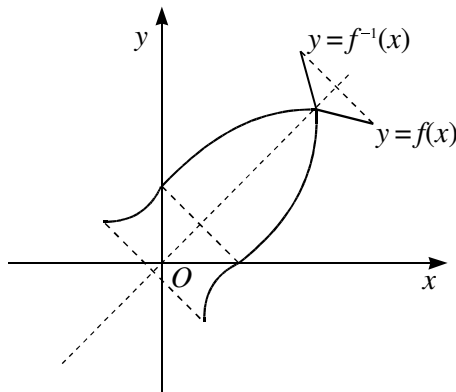


Рис.1.4.

1.3. Основные элементарные функции. Элементарные функции

Следующие функции называются *основными (простейшими) элементарными функциями*.

1. *Постоянная* функция: $y = c$, где c – действительное число.

2. *Степенная* функция: $y = x^a$, где $a \in \mathbb{R}$ (рис.1.5). В случае произвольного показателя a степенная функция определена для $x > 0$. Но в ряде случаев область определения степенной функции расширяют.

Например, если a – натуральное число, то степенную функцию считают определённой на всей числовой оси $\mathbb{R}$. Также на всей числовой оси определены функции вида $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[3]{x^2}$ и т.п. Если a – целое отрицательное число, то степенная функция определена для всех $x \neq 0$.

Отметим, что в случае иррационального показателя a степенную функцию будем определять равенством $x^a = e^{a \ln x}$, т.е. как сложную функцию.

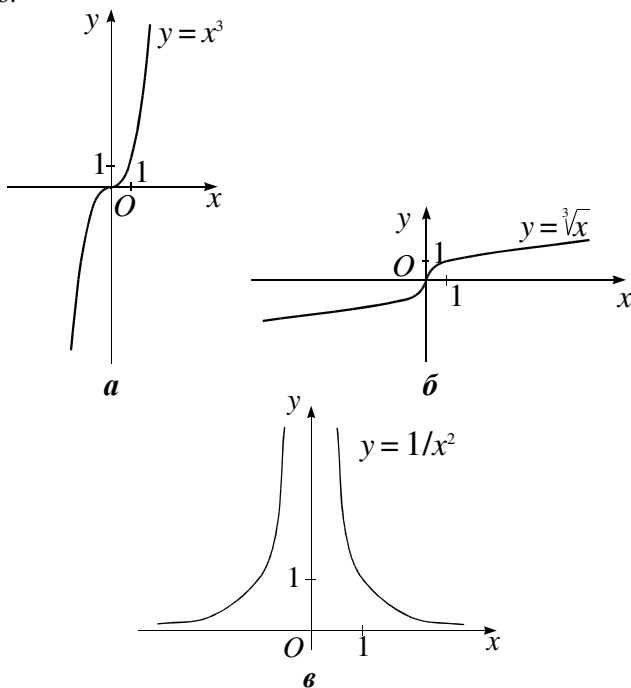


Рис.1.5.

3. Показательная функция: $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$ (рис.1.6).

4. Логарифмическая функция: $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ (рис.1.7).

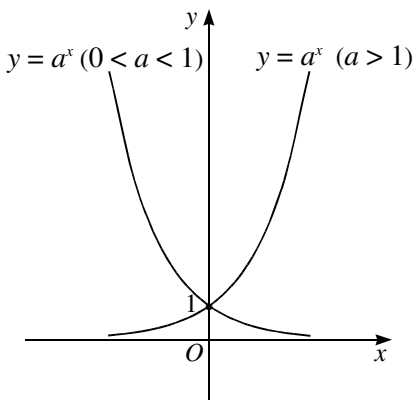


Рис.1.6.

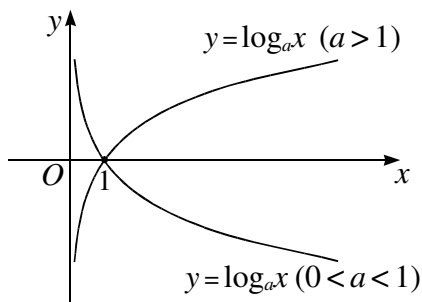
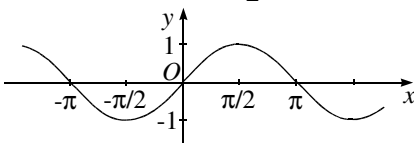
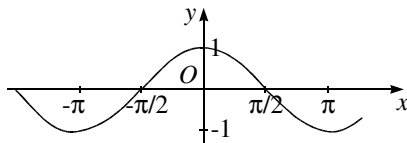


Рис.1.7.

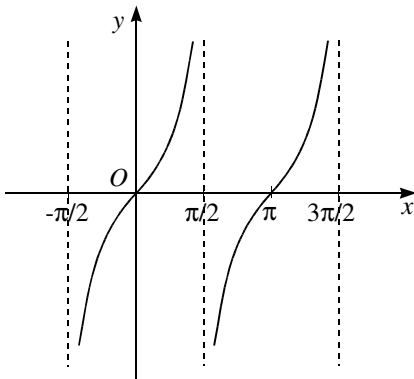
5. Тригонометрические функции: $y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$; $y = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$; $y = \operatorname{tg} x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $y = \operatorname{ctg} x$, $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (рис.1.8).



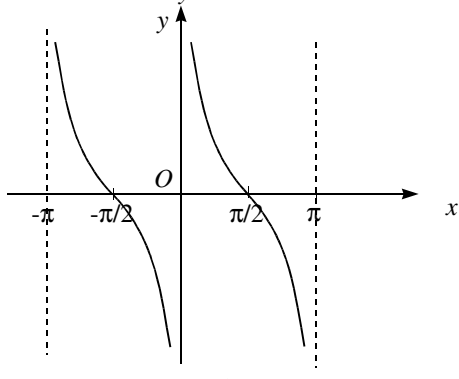
a $y = \sin x$



b $y = \cos x$



$в$ $y = \operatorname{tg} x$



$г$ $y = \operatorname{ctg} x$

Рис.1.8.

6. Обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $x \in [-1; 1]$; $y = \arccos x$, $x \in [-1; 1]$; $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$; $y = \operatorname{arcctg} x$, $x \in \mathbb{R}$ (рис.1.9).

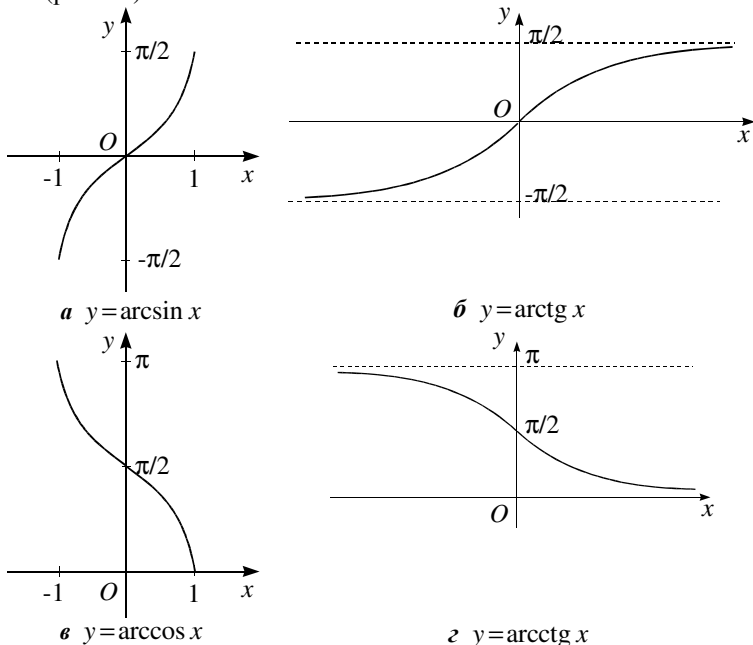


Рис.1.9.

Напомним, как вводятся обратные тригонометрические функции.

Функция $x = \sin y$ не является монотонной на всей области определения (см. рис.1.8,а). Поэтому однозначной обратной функции у неё нет. Но она является строго монотонной на отрезке $D = [-\pi/2; \pi/2]$ и имеет множество значений $E = [-1; 1]$. Следовательно, для функции $x = \sin y$, рассматриваемой только для аргументов $y \in [-\pi/2; \pi/2]$, определена однозначная обратная функция, которую обозначают $y = \arcsin x$ (см. рис.1.9,а). Область определения функции арксинус есть отрезок $[-1; 1]$, а множество значений – отрезок $[-\pi/2; \pi/2]$.

Аналогично определяются функции арккосинус, арктангенс и арккотангенс.

Функция $y = \arccos x$ (см. рис.1.9,а) есть функция, обратная к строго монотонной функции $x = \cos y$, $y \in [0; \pi]$. Область определения функции арккосинус – отрезок $[-1; 1]$, область значений – отрезок $[0; \pi]$.

Функция $y = \arctg x$ (см. рис.1.9,б) – функция, обратная к строго монотонной функции $x = \operatorname{tg} y$, $y \in (-\pi/2; \pi/2)$. Область определения функции арктангенс – вся числовая ось, область значений – интервал $(-\pi/2; \pi/2)$.

Функция $y = \operatorname{arccotg} x$ (см. рис.1.9,в) – функция, обратная к строго монотонной функции $x = \operatorname{ctg} y$, $y \in (0; \pi)$. Область определения функции арккотангенс – вся числовая ось, область значений – интервал $(0; \pi)$.

Элементарной называют функцию, которая может быть получена из основных элементарных с помощью применения конечного числа арифметических действий и суперпозиций. Например, функция $y = \log_2(x^2 + 2x + 2)$ элементарная, так как она является суперпозицией функций основной элементарной функции $y = \log_2 u$ и элементарной функции $u = x^2 + 2x + 2$, полученной применением конечного числа арифметических действий над постоянной и степенной функциями.

Напомним ещё ряд понятий относительно функций.

Функция $f(x)$ называется *чётной (нечётной)*, если её область определения симметрична относительно точки $x=0$ и $f(-x) = f(x)$ (соответственно $f(-x) = -f(x)$) для любого $x \in D(f)$. Например, степенные функции являются чётными, если показатель степени – чётное число, и нечётными, если показатель степени – нечётное число. Чётной является функция косинус, нечётными функциями – синус, тангенс, котангенс. График чётной функции симметричен относительно оси ординат, нечётной – относительно оси абсцисс.

Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует положительное число $T > 0$ (*период функции*) такое, что $f(x+T) = f(x)$

для любого $x \in D(f)$. Периодическими являются тригонометрические функции.

Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве I , если большему значению аргумента из множества I соответствует большее значение функции, т.е. для любых $x_1, x_2 \in I$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$). Если выполняется нестрогое неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) \geq f(x_2)$), то функция называется *неубывающей* (*невозрастающей*) на множестве I .

Например, показательная функция $y = a^x$ на всей области определения возрастающая, если $a > 1$, и убывающая, если $0 < a < 1$. Отметим, что функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, но не является возрастающей на всей области определения.

Функция $f(x)$ называется *ограниченной сверху* (*снизу*) на множестве I , если существует такое число $M(m)$, что $f(x) \leq M$ (соответственно $f(x) \geq m$) для всех $x \in I$. Функция, ограниченная сверху и снизу на множестве I , называется *ограниченной* на этом множестве.

Например, функции $\sin x$, $\cos x$ ограничены на всей области определения, функция a^x ограничена снизу на всей области определения. Функция x^2 не является ограниченной на всей области определения, но ограничена на любом конечном промежутке.

1.4. Комплексные числа

1. Определение комплексных чисел и арифметических действий над ними

Как известно, во множестве действительных чисел не всякое квадратное уравнение имеет решение. Например, уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет действительных корней. Решение задачи о нахождении корней

произвольного квадратного, а тем более кубического и т.д., уравнений привело к понятию комплексного числа.

Комплéксным числом называется выражение вида $z = x + iy = x + yi$, где x, y – действительные числа; i – специальный символ, называемый *мнимой единицей*.

Выражение $z = x + iy = x + yi$ называют *алгебраической формой записи* комплексного числа.

Множество всех комплексных чисел обозначается символом $\mathbb{C}$.

Выражения вида $x + 0i$ будем записывать как x , выражения вида $0 + yi$ – как yi . В частности, комплексное число $0 + 0i$ называется *нулём* во множестве комплексных чисел и обозначается как 0 , комплексное число вида $1 + 0i$ называется *единицей* во множестве комплексных чисел и обозначается как 1 .

Действительное число x называется *действительной частью* комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, действительное число y – *мнимой частью* комплексного числа z и обозначается $y = \operatorname{Im} z$. Например, $\operatorname{Re}(-2 - 5i) = -2$, $\operatorname{Im}(-2 - 5i) = -5$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + y_1i$ и $z_2 = x_2 + y_2i$ называются *равными*, если одновременно $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$, т.е. одновременно совпадают действительные и мнимые части комплексных чисел.

Арифметические операции сложения, вычитания и умножения над комплексными числами определяются следующим образом:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i; \quad z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i.$$

Из определения операции умножения следует, что $i^2 = -1$:

$$i^2 = i \cdot i = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)i = -1 + 0i = -1.$$

Поэтому часто пишут $i = \sqrt{-1}$. Отметим, что также и $(-i)^2 = -1$.

Запоминать данные выше определения операций сложения, вычитания и умножения комплексных чисел не нужно. Достаточно помнить следующее правило: *чтобы сложить, вычесть или умножить комплексные числа, нужно выполнить привычные из алгебры действия над буквенными выражениями вида $x + yi$, и заменить, если есть, i^2 на -1 .*

Пример 1.2. Найти $z_1 + z_2$, если $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = 1 - 4i$.

◀ Складываем буквенные выражения $-2+3i$ и $1-4i$ по правилам алгебры: $z_1 + z_2 = -2+3i+1-4i = (-2+1) + (3-4)i = -1-i$. ▶

Пример 1.3. Выполнить действия $(2-3i)(-3+5i) + (2-i)^2$.

◀ Сначала перемножим выражения $2-3i$ и $-3+5i$ по правилам алгебры:

$$(2-3i)(-3+5i) = 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 5i - 3i \cdot (-3) - 3i \cdot 5i = -6 + 10i + 9i - 15i^2 = -6 + 19i - 15i^2.$$

Заменяя справа i^2 на -1 , получим: $(2-3i)(-3+5i) = 15 - 6 + 19i = 9 + 19i$. Аналогично, умножая $2-i$ и $2-i$, или, используя формулу квадрата суммы, найдём: $(2-i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 3 - 4i$.

Таким образом,

$$(2-3i)(-3+5i) + (2-i)^2 = 9 + 19i + 3 - 4i = 12 + 15i. \text{ ▶}$$

Комплексное число $z = x - iy$ называют *сопряжённым* комплексному числу $z = x + iy$ и обозначают $\bar{z}$. Например, $\overline{-4-5i} = -4+5i$, $\overline{-4+5i} = -4-5i$.

Найдём произведение комплексного числа на сопряжённое к нему:

$$z\bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 - y^2i^2 = x^2 + y^2. \quad (1.2)$$

Если $z = x + yi \neq 0$, т.е. $x^2 + y^2 \neq 0$, то обратное ему число $\frac{1}{z}$ даётся формулой $\frac{1}{z} = \frac{x-yi}{x^2+y^2}$. Так как $x-yi = \bar{z}$ и, в силу равенства

$$(1.2), \quad x^2 + y^2 = z\bar{z}, \quad \text{то} \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}.$$

$\frac{z_1}{z_2}$, нужно числитель и знаменатель дроби умножить на число, сопряжённое к знаменателю, затем выполнить в числителе действие умножения и результат разделить на действительное число $x_2^2 + y_2^2$.

Пример 1.4. Выполнить деление $\frac{2-3i}{-3+4i}$.

◀ Умножим числитель и знаменатель на число $\overline{-3+4i} = -3-4i$:

$$\frac{2-3i}{-3+4i} = \frac{(2-3i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)} = \frac{-6+i+12i^2}{9+16} = \frac{-6+i-12}{25} = -\frac{18}{25} + \frac{1}{25}i. \blacktriangleright$$

Нетрудно заметить, что выполнение арифметических операций над выражениями вида $x+0i$ приводит к выражению такого же вида. Поэтому выражение $x+0i$ отождествляют с действительным числом x . Само множество действительных чисел является подмножеством множества комплексных чисел.

2. Геометрическое изображение комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа

Комплексное число $z = a+bi$ на плоскости с декартовой системой координат Oxy можно изображать как *точку* или *вектор* с координатами (a, b) (рис.1.10). Плоскость в этом случае называют *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс называют *действительной осью* (на ней изображаются действительные числа $a = a+0i$), ось ординат – *мнимой осью* (на ней изображаются чисто мнимые числа $bi = 0+bi$).

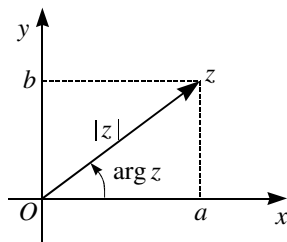


Рис.1.10.

Число $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется *модулем* комплексного числа $z = a+bi$ и обозначается $|z|$. Модуль числа z равен расстоянию от начала координат до точки плоскости, изображающей это число. Или, при векторной интерпретации комплексных чисел, модуль числа z есть длина вектора z .

Угол между радиусом-вектором $z \neq 0$ (т.е. вектором z , приложенным к началу координат) и положительным направлением действительной оси называется *аргументом* комплексного числа z и обозначается $\text{Arg } z$. Каждое значение аргумента совпадает с величиной φ угла, на который следует повернуть положительное направление оси Ox , до

совпадения с направлением радиусом-вектором точки плоскости, изображающей число z . Как обычно, считаем $\varphi > 0$, если поворот осуществляется против часовой стрелки, и $\varphi < 0$ в противном случае.

Для числа $z = 0$ аргумент не определён, но это единственное комплексное число, модуль которого равен нулю.

Аргумент числа принимает бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на слагаемые, кратные 2π . Поэтому выделяют какой-либо промежуток длины 2π и значения аргумента, принадлежащие этому выделенному промежутку, называют *главным значением аргумента* и обозначают $\arg z$. Обычно в качестве промежутка для главных значений аргумента берут $[0; 2\pi)$ или $[-\pi; \pi)$. Далее ниже везде считается, что $\arg z \in [0; 2\pi)$.

Если $a \neq 0$, то угол $\varphi = \arg z$ удовлетворяет уравнению $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$.

Если $\arg z \in [0; 2\pi)$, то найти главное значение аргумента можно по правилу:

- $\varphi = \arg z = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$, если $a > 0, b > 0$, т.е. комплексное число лежит в I четверти;
- $\varphi = \arg z = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi$, если $a < 0$, т.е. комплексное число лежит во II или III четверти;
- $\varphi = \arg z = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + 2\pi$, если $a > 0, b < 0$, т.е. комплексное число лежит в IV четверти.

Для положительных действительных чисел $\varphi = 0$, для отрицательных — $\varphi = \pi$. Для чисел $z = bi$ (т.е. чисто мнимых) $\arg z = \pi/2$, если $b > 0$, и $\arg z = 3\pi/2$, если $b < 0$.

Для нахождения аргумента числа z полезно изобразить число на комплексной плоскости.

Пример 1.5. Изобразить числа на комплексной плоскости и найти их модули и аргументы: а) $z_1 = \sqrt{3} - i$; б) $z_2 = -2 - 2i$; в) $z_3 = -1 + 3i$.

◀ а) $|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$. Так как число z_1 лежит в IV четверти, то по правилу нахождения главного значения аргумента получим:

$$\varphi = \arg z_1 = \arctg \frac{-1}{\sqrt{3}} + 2\pi = 2\pi - \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = 11\pi/6.$$

Следовательно, $\text{Arg } z_1 = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

На комплексной плоскости соответствующая числу z_1 точка имеет координаты $(\sqrt{3}, -1)$, длина радиуса-вектора равна модулю числа, а угол от положительного направления оси Ox до радиуса-вектора соответствует значению аргумента, взятому из промежутка $[0; 2\pi)$ (рис.1.11,а);

б) $|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Так как число z_2 лежит в III четверти (рис.11,б), то для главного значения аргумента получим:
 $\varphi = \arg z_2 = \arctg \frac{-2}{-2} + \pi = \arctg 1 + \pi = 5\pi/4$, а $\text{Arg } z_2 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$;

в) $|z_3| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$. Так как число z_3 лежит во II четверти (рис.11,в), то главное значение аргумента $\varphi = \arg z_3 = \arctg \frac{3}{-1} + \pi = \arctg(-3) + \pi = -\arctg 3 + \pi$, а $\text{Arg } z_3 = -\arctg 3 + \pi + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. ▶

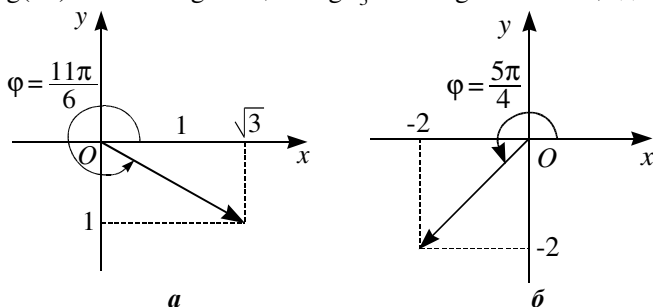
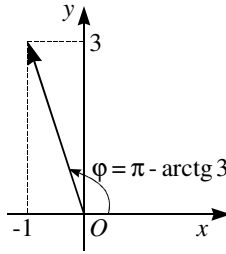


Рис.1.11.



в

Рис.1.11. Окончание.

3. Тригонометрическая и показательная формы записи комплексных чисел

Для комплексного числа $z = x + yi$ из формул тригонометрии следует, что

$$x = |z| \cos \varphi, \quad y = |z| \sin \varphi,$$

где φ – аргумент числа z . Поэтому любое комплексное число $z \neq 0$ можно записать в *тригонометрической форме*

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Очевидно, что два комплексных числа, записанных в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на слагаемое, кратное 2π .

Обозначим символом $e^{i\varphi}$ комплексное число $\cos \varphi + i \sin \varphi$. С помощью этого обозначения комплексное число $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ можно записать в *показательной форме* $z = |z|e^{i\varphi}$.

В записи числа в тригонометрической или показательной форме обычно указывают только одно значение аргумента, причем часто угол φ берут из промежутка $[0; 2\pi)$ (см. замечание к примеру 1.6).

Так как $e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = \cos \varphi - i \sin \varphi$, то, складывая и вычитая $e^{i\varphi}$ и $e^{-i\varphi}$, находим $2 \cos \varphi = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}$ и $2i \sin \varphi = e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}$. Отсюда следуют замечательные *формулы Эйлера**

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i},$$

устанавливающие глубокую связь между тригонометрическими и показательными функциями.

Пример 1.6. Записать в тригонометрической и показательной формах число $\sqrt{3} - i$.

◀ Воспользовавшись результатами примера 1.5 а, получаем:

• $\sqrt{3} - i = 2(\cos(11\pi/6) + i \sin(11\pi/6))$ – в тригонометрической форме;

• $\sqrt{3} - i = 2e^{i\frac{11\pi}{6}}$ – в показательной форме. ▶

Замечание. Из свойств синуса и косинуса следует, что верны равенства

$$\begin{aligned} \sqrt{3} - i &= 2(\cos(11\pi/6) + i \sin(11\pi/6)); \\ \sqrt{3} - i &= 2(\cos(\pi/6) - i \sin(\pi/6)). \end{aligned}$$

Однако запись $2(\cos(\pi/6) - i \sin(\pi/6))$ не является тригонометрической формой записи числа $\sqrt{3} - i$.

4. Геометрическая интерпретация сложения и умножения комплексных чисел. Формула Муавра**.

Рассматривая комплексные числа как векторы на плоскости и вспоминая правило сложения векторов, заданных координатами, заключаем, что с геометрической точки зрения сложение (вычитание) комплексных чисел есть сложение (вычитание) соответствующих векторов.

* Эйлер Леонард (1707–1783) – уроженец Швейцарии, в 1727–1741 и 1766–1783 гг. работал в Петербурге.

** Муавр Абрахам (1667–1754) – английский математик.

Дадим геометрическую трактовку умножения комплексных чисел.
Пусть

$$z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = |z_1| \cos \varphi_1 + i |z_1| \sin \varphi_1 ;$$

$$z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = |z_2| \cos \varphi_2 + i |z_2| \sin \varphi_2 .$$

Выполним умножение этих чисел в алгебраической форме

$$z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2| (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) +$$

$$+ i |z_1| \cdot |z_2| (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) .$$

Используя формулы косинуса суммы и синуса суммы, окончательно находим:

$$z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) . \quad (1.3)$$

Таким образом, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Отсюда следует геометрическая интерпретация умножения комплексных чисел: *чтобы умножить число z_1 на число z_2 , нужно вектор z_1 повернуть на угол, равный аргументу вектора z_2 , затем полученный вектор растянуть в $|z_2|$ раз, если $|z_2| > 1$, и сжать в $|z_2|$ раз, если $|z_2| < 1$.*

Для операции деления аналогично получаем, что $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$, т.е. при делении модули делятся, а аргументы вычитаются.

В показательной форме операции умножения и деления выполняются по следующим правилам: $z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} .$$

Из равенства (1.3) вытекает *формула Муавра* возведения комплексного числа в натуральную степень

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) . \quad (1.4)$$

Пример 1.7. Найти $(\sqrt{3} - i)^5$. Ответ записать в тригонометрической и алгебраической формах.

◀В алгебраической форме число $\sqrt{3}-i$ возвести в пятую степень сложно. Поэтому запишем его сначала в тригонометрической форме $\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$ (см. пример 1.6). Теперь по формуле Муавра легко находим

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^5=2^5\left(\cos\frac{5\cdot 11\pi}{6}+i\sin\frac{5\cdot 11\pi}{6}\right)=32\left(\cos\frac{55\pi}{6}+i\sin\frac{55\pi}{6}\right).$$

Как отмечалось выше, в тригонометрической форме угол φ берут, обычно, из промежутка $[0; 2\pi)$. Поэтому выделим целое число периодов 2π : $\frac{55\pi}{6}=\frac{48+7}{6}\pi=8\pi+\frac{7\pi}{6}$. Таким образом, в тригонометрической форме окончательно получим $\left(\sqrt{3}-i\right)^5=32\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.

Так как $\cos\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{1}{2}$, то в алгебраической форме $\left(\sqrt{3}-i\right)^5=32\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-16\sqrt{3}-16i$. ▶

5. Извлечение корней из комплексных чисел

Комплексное число λ называется *корнем n -й степени* (n – натуральное число) из комплексного числа z , если $\lambda^n=z$. Обозначение корня n -й степени $\sqrt[n]{z}$. Если $z=0$, то $\sqrt[n]{z}=0$. Для любого $z\neq 0$ имеется n различных значений корня, которые вычисляются по формуле

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \quad k=0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (1.5)$$

где $\sqrt[n]{|z|}$ – арифметическое значение корня n -й степени из положительного числа $|z|$; φ – какое-либо значение аргумента z .

Действительно, запишем данное число z и искомое число $\lambda=\sqrt[n]{z}$ в тригонометрической форме $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$,

$\lambda = |\lambda|(\cos \theta + i \sin \theta)$. Из определения корня n -й степени и формулы Муавра (1.4) следует, что должно выполняться равенство

$$\lambda^n = |\lambda|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Как отмечалось выше в п.3, это равенство равносильно одновременному выполнению двух равенств $|\lambda|^n = |z|$ и $n\theta = \varphi + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $|\lambda| = \sqrt[n]{|z|}$ и $\theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$.

Угол θ задаёт направление вектора $\sqrt[n]{z}$ на комплексной плоскости. Возьмём $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Направления, вычисленные для этих значений k , будут различными. Таким образом, для вектора $\sqrt[n]{z}$ существует n различных направлений, т.е. имеется n различных значений корня из z . Если брать другие значения k , то задаваемые ими направления будут совпадать с одним из выделенных выше направлений. В итоге заключаем, что для любого числа $z \neq 0$ существует ровно n различных значений корня n -й степени.

Пример 1.8. Найти числа $\sqrt[3]{-4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i}$ и изобразить их на комплексной плоскости.

◀ а) Находим модуль и аргумент числа $-4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$:

$$|-4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i| = \sqrt{(-4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{64} = 8,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{4\sqrt{2}}{-4\sqrt{2}} + \pi = \operatorname{arctg}(-1) + \pi = 3\pi/4.$$

б) Подставляем найденные значения модуля, аргумента и $n=3$ в формулу (1.5) извлечения корня:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i} &= \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} \right) = \\ &= 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3} \right) \right), \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Корень третьей степени имеет три значения:

$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad z_1 = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right), \\ z_2 = 2 \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right).$$

На комплексной плоскости эти значения изображаются точками на окружности $|z|=2$. Если эти точки соединить хордами, получится правильный треугольник (рис.1.12). ►

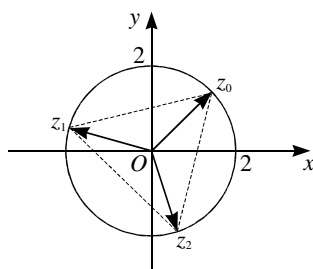


Рис.1.12.

Используя формулу (1.5), можно найти все корни многих алгебраических уравнений, которые не «решались» в области действительных чисел. Например, уравнение $x^4 + 1 = 0$, которое не имеет действительных корней, рассматриваемое в ком-

плексной области имеет четыре различных корня $\sqrt[4]{-1}$:

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad z_1 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \\ z_2 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad z_3 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Уравнение $x^3 + 1 = 0$ в комплексной области, кроме действительного корня $x = -1$, имеет ещё два комплексных корня:

$$z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{и} \quad z = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

В области комплексных чисел «решается» любое квадратное уравнение. При этом несложно доказать, что формула корней квадратного уравнения сохраняет силу и в случае отрицательного дискриминанта.

Поэтому, например, для уравнения $x^4 + 2x + 5 = 0$ корнями будут ком-

плексные числа $\frac{-2 + \sqrt{-16}}{2} = -1 + 2\sqrt{-1}$. Так как в комплексной облас-

ти $\sqrt{-1} = \pm i$, то получаем два решения: $-1 + 2i$ и $-1 - 2i$.

2. Предел и непрерывность

2.1. Предел последовательности. Свойства сходящихся последовательностей

Основные понятия математического анализа – производная, интеграл, ряд, широко применяемые при решении технических, физических, экономических и других задач, – базируются на понятии предела. Поэтому понятию предела в математическом анализе уделяется особое внимание. Начнём с предела последовательности.

1. Понятие последовательности

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое действительное число x_n , то говорят, что задана *числовая последовательность* или просто *последовательность*. Число x_n называется n -м членом или элементом последовательности. Обозначают последовательность $\{x_n\}$ или, опуская скобки, x_n .

Таким образом, последовательность – это функция, область определения которой множество натуральных чисел: $x_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Если функция f задана аналитически, то выражение $x_n = f(n)$ называется *формулой общего члена* последовательности $\{x_n\}$.

Зная формулу общего члена, легко найти значение x_n для любого номера n .

Пример 2.1. $x_n = \frac{1}{n}$: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{3}$, ...

Пример 2.2. $x_n = \frac{n-1}{n}$: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{2}{3}$, ...

Пример 2.3. $x_n = (-1)^n$: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$, $x_5 = -1$, ...

Пример 2.4. $x_n = (-1)^n n$: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, $x_4 = 4$, $x_5 = -5$, ...

Может рассматриваться и обратная задача: по нескольким заданным значениям последовательности найти формулу её общего члена. Например, пусть $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 9$, Здесь нетрудно заметить, что выписанные значения равны квадратам номеров членов последовательности. Поэтому можно положить $x_n = n^2$. Однако несложно привести примеры последовательностей, для которых мы можем найти значения x_n для любого номера, но не можем указать формулу общего члена. Например, неизвестна формула для вычисления членов последовательности простых чисел.

2. Определение предела последовательности

Рассматривая примеры 2.1 - 2.4, можно заметить существенные различия в поведении членов последовательностей с возрастанием номера.

Члены последовательности $x_n = \frac{1}{n}$ с увеличением номера всё

меньше отличаются от числа 0, члены последовательности $x_n = \frac{n-1}{n}$ —

от числа 1. Для последовательностей $x_n = (-1)^n$ и $x_n = (-1)^n n$ не существует чисел, к которым бы их члены приближались с возрастанием

номера. Поэтому говорят, что последовательности $x_n = \frac{1}{n}$ и $x_n = \frac{n-1}{n}$

имеют пределы (стремятся к определённым числам), а последовательности $x_n = (-1)^n$ и $x_n = (-1)^n n$ пределов не имеют.

Определение. Число a называется *пределом последовательности* x_n , если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $N(\varepsilon)$ такое, что для всех номеров $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \quad (2.1)$$

Если число a – предел последовательности, то пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ или $x_n \rightarrow a$. Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, не имеющая предела, – *расходящейся*.

Пример 2.5. Используя определение предела, доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

◀Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Нужно найти число $N(\varepsilon)$ так, что для любого натурального $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon, \text{ т.е. } \frac{1}{n} < \varepsilon. \text{ Для положительных чисел } n \text{ и } \varepsilon \text{ последнее}$$

неравенство равносильно следующему: $n > 1/\varepsilon$. Положим $N(\varepsilon) = 1/\varepsilon$. Тогда для каждого номера $n > N(\varepsilon)$ будет выполняться неравенство

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon, \text{ что по определению предела означает } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0. \blacktriangleright$$

Интервал вида $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ называют ε -окрестностью числа a . Так как неравенство (2.1) равносильно двойному неравенству $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, то определение предела последовательности можно сформулировать следующим образом: *число a есть предел последовательности x_n , если для любой сколь угодно малой ε -окрестности точки a найдется такое число $N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n > N(\varepsilon)$ члены последовательности принадлежат ε -окрестности точки a (рис.2.1).*

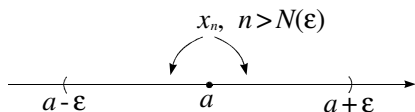


Рис.2.1.

Таким образом, если число a есть предел последовательности x_n , то вне любой окрестности числа a может лежать лишь конечное число её членов.

Если же для какого-то числа найдется такая его окрестность, вне которой лежит бесконечное количество членов последовательности x_n , то это число не может быть пределом x_n . Используя это утверждение, легко доказать, что

последовательность $x_n = (-1)^n$ не имеет предела. Действительно, расстояние между точками 1 и -1 равно 2. Поэтому для любой точки a на числовой прямой интервал $(a-0,5; a+0,5)$ длины единица не содержит хотя бы одного из чисел 1 или -1 , т.е. не содержит бесконечного числа членов последовательности.

3. Свойства сходящихся последовательностей

Теорема 2.1. Если последовательность имеет предел, то он единственный.

◀ Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и предположим, что последовательность x_n стремится также к числу $b \neq a$. Возьмём непересекающиеся ε -окрестности чисел a и b (рис.2.2). Так как $x_n \rightarrow a$, то все x_n , начиная с некоторого номера $N(\varepsilon)$, принадлежат ε -окрестности точки a и не принадлежат ε -окрестности точки b . Значит, вне ε -окрестности точки b лежит бесконечное количество членов последовательности x_n , и поэтому точка b не может быть пределом x_n . Следовательно, предположение неверно и последовательность может иметь только один предел. ▶

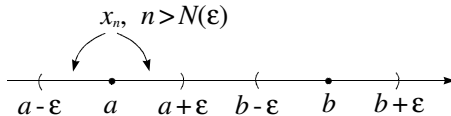


Рис.2.2.

Теорема 2.2. Пусть $x_n \rightarrow a$, $y_n \rightarrow b$ и $x_n \leq y_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $a \leq b$.

◀ Предположим, что $a > b$. Возьмём, как и при доказательстве теоремы 2.1, непересекающиеся ε -окрестности чисел a и b . Так как a лежит правее b , то $b + \varepsilon \leq a - \varepsilon$. Все члены последовательности x_n для $n > N_1(\varepsilon)$ принадлежат интервалу $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, а все члены последовательности y_n для $n > N_2(\varepsilon)$ – интервалу $(b - \varepsilon; b + \varepsilon)$. Если взять номер n_* , одновременно больший чисел N_1 и N_2 , то получим: $y_{n_*} < b + \varepsilon \leq a - \varepsilon < x_{n_*}$, т.е. $y_{n_*} < x_{n_*}$. Это противоречит условию:

$x_n \leq y_n$ для любого n . Следовательно, предположение неверно и $a \leq b$. ►

Замечание. Если для сходящихся последовательностей выполняется *строгое* неравенство $x_n < y_n$, то *не обязательно* $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n < \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Например, $x_n = -\frac{1}{n} < y_n = \frac{1}{n}$, но $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

Аналогично предыдущим доказывается следующее свойство.

Теорема 2.3. Пусть $x_n \leq z_n \leq y_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$. Тогда последовательность z_n также сходится, причём $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$.

Пример 2.6. Найти предел последовательности $x_n = \frac{1}{n!}$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ (читается «*эн факториал*»).

◀Рассмотрим две последовательности: $a_n = 0$ для любого n и $b_n = 1/n$. Так как $a_n = 0 < x_n = \frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \leq \frac{1}{n} = b_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, то предел x_n существует и также равен нулю. ►

Определение. Последовательность x_n называется *ограниченной сверху (снизу)*, если существует такое число M (соответственно m), что для любого номера n выполняется неравенство $x_n \leq M$ (соответственно $x_n \geq m$).

Определение. Последовательность x_n называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху, и снизу, т.е. существуют числа M и m такие, что для любого номера n выполняется двойное неравенство

$$m \leq x_n \leq M. \quad (2.2)$$

Другими словами, последовательность ограничена, если существует отрезок, которому принадлежат все члены последовательности.

Определение ограниченной последовательности можно сформулировать и так: *последовательность x_n называется ограниченной, если*

существует число C такое, что для любого номера n выполняется неравенство $|x_n| \leq C$.

Теорема 2.4. Если последовательность сходится, то она ограничена.

◀ Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Возьмём $\varepsilon = 1$. По определению предела последовательности найдётся номер k такой, что $a - 1 < x_n < a + 1$ для всех $n > k$. Если в качестве m взять наименьшее из чисел $a - 1, x_1, x_2, \dots, x_k$, а в качестве M – наибольшее из чисел $a + 1, x_1, x_2, \dots, x_k$, то для любого n будут выполняться неравенства (2.2). ▶

Но ограниченная последовательность не обязательно сходится. Например, последовательность $(-1)^n$ ограничена, так как $|(-1)^n| \leq 1$ для любого n , но не сходится.

Таким образом, ограниченность последовательности есть *необходимое, но не достаточное* условие её сходимости.

Вместе с тем из *всякой* ограниченной последовательности x_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность x_{n_k} . Это важное утверждение называют *леммой Больцано–Вейерштрасса**. Для расходящейся последовательности $x_n = (-1)^n$ сходящейся будет, например, подпоследовательность $x_{2n} = 1$ для любого n . Число, к которому сходится какая-либо подпоследовательность x_{n_k} , называется *предельной точкой* последовательности x_n . Для $x_n = (-1)^n$ предельных точек две: $a = 1$ и $a = -1$.

Теорема 2.5. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0$, то существует число N_0 такое, что для всех $n > N_0$ выполняется неравенство $x_n > a/2$, если $a > 0$, и $x_n < a/2$, если $a < 0$.

* *Больцано* *Бернард* (1781–1848) – чешский математик. *Вейерштрасс* *Карл* (1815–1897) – немецкий математик.

◀ Возьмём $\varepsilon = |a|/2 > 0$, так как $a \neq 0$. Для этого ε существует N_0 такое, что для $n > N_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \frac{|a|}{2}$, или $a - \frac{|a|}{2} < x_n < a + \frac{|a|}{2}$. Отсюда $x_n > a - |a|/2 = a - a/2 = a/2$ для $n > N_0$, если $a > 0$, и $x_n < a + |a|/2 = a + a/2 = a/2$ для $n > N_0$, если $a < 0$. ▶

Таким образом, если предел последовательности – положительное (отрицательное) число, то и *все* члены последовательности также будут, начиная с некоторого номера, положительными (отрицательными) числами.

Замечание. Из теоремы 2.5 следует вывод: если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0$, то, начиная с некоторого номера, члены последовательности x_n отстоят от нуля на расстоянии не меньшем, чем $|a|/2$. Поэтому для последовательности x_n , предел которой не равен нулю, определены частные $1/x_n$ (за исключением, возможно, некоторых первых номеров с нулевыми значениями x_n). Более того, для n , больших некоторого N_0 , последовательность $1/x_n$ будет ограничена: $1/|x_n| < 2/|a|$.

2.2. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

1. Понятие бесконечно малой и бесконечно большой последовательности

Последовательность α_n называется *бесконечно малой*, если её предел равен нулю, т.е. для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $N(\varepsilon)$, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Теорема 2.6. Последовательность x_n сходится к числу a тогда и только тогда, когда её можно записать в виде: $x_n = a + \alpha_n$, где α_n – бесконечно малая последовательность.

◀ Если x_n стремится к числу a , то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Таким образом, последовательность $\alpha_n = x_n - a$ является бесконечно малой и справедливо представление: $x_n = a + \alpha_n$. Обратно, если последовательность x_n можно записать в виде $x_n = a + \alpha_n$, где α_n – бесконечно малая последовательность, то $|x_n - a| = |\alpha_n| < \varepsilon$ для $n > N(\varepsilon)$. Значит, по определению предела последовательности, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. ▶

Последовательность β_n называется *бесконечно большой*, если для любого сколь угодно большого числа $M > 0$ найдется число $N(M)$, такое, что для всех номеров $n > N(M)$ выполняется неравенство $|\beta_n| > M$. При этом пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \infty$ или $\beta_n \rightarrow \infty$. Если $\beta_n \rightarrow \infty$, то любой отрезок $[-M; M]$ содержит лишь конечное число членов последовательности β_n .

Если бесконечно большая последовательность β_n , начиная с некоторого номера, принимает только положительные (отрицательные) значения, то пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = +\infty$ или $\beta_n \rightarrow +\infty$ (соответственно $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = -\infty$ или $\beta_n \rightarrow -\infty$).

Примерами бесконечно больших последовательностей являются $\beta_n = n^2 \rightarrow +\infty$, $\beta_n = -n^3 \rightarrow -\infty$, $\beta_n = (-1)^n n^2 \rightarrow \infty$.

Отметим, что всякая бесконечно большая последовательность является неограниченной последовательностью. Вместе с тем *не всякая неограниченная последовательность будет бесконечно большой*.

Например, последовательность $x_n = n^{(-1)^n}$, т.е. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = \frac{1}{3}$,

$x_4 = 4, x_5 = \frac{1}{5}, x_6 = 6, \dots$, неограниченная, но не бесконечно большая.

Действительно, с одной стороны, последовательность неограниченная, так как не существует отрезка, который бы содержал все члены этой последовательности. С другой стороны, последовательность не бесконечно большая, так как отрезок $[-1; 1]$ содержит все члены последовательности с нечётными номерами, что противоречит определению бесконечно большой величины.

Из определений бесконечно малой и бесконечно большой последовательностей следует, что $1/\alpha_n$ будет бесконечно большой последовательностью, если α_n – бесконечно малая последовательность ($\alpha_n \neq 0$). И, наоборот, $1/\beta_n$ – бесконечно малая последовательность, если β_n – бесконечно большая.

2. Свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей

Теорема 2.7. Сумма бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

◀ Пусть $\alpha_n \rightarrow 0$ и $\gamma_n \rightarrow 0$. Нужно доказать, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N_0(\varepsilon)$, что всех $n > N_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|\alpha_n + \gamma_n| < \varepsilon$.

По определению бесконечно малой последовательности, для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $N_1(\varepsilon)$ и $N_2(\varepsilon)$ такие, что $|\alpha_n| < \varepsilon/2$ для $n > N_1(\varepsilon)$ и $|\gamma_n| < \varepsilon/2$ для $n > N_2(\varepsilon)$. Положим $N_0(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Так как $|a+b| \leq |a| + |b|$ для любых чисел a и b , то для всех $n > N_0(\varepsilon)$ будет выполняться неравенство $|\alpha_n + \gamma_n| \leq |\alpha_n| + |\gamma_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, что и требовалось доказать. ▶

Теорема 2.8. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность.

◀ Пусть $\alpha_n \rightarrow 0$, а последовательность x_n ограничена. Нужно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$ такое, что всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|\alpha_n x_n| < \varepsilon$.

Так как x_n – ограниченная последовательность, то $|x_n| \leq M$ для всех n при некотором $M > 0$. По определению бесконечно малой последовательности, для всякого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$ такое, что $|\alpha_n| < \varepsilon / M$ для всех $n > N(\varepsilon)$. Поэтому для всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|\alpha_n x_n| = |\alpha_n| \cdot |x_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$. ▶

Всякая сходящаяся последовательность ограничена (см. теорему 2.4). Поэтому из теоремы 2.8, как следствие, заключаем, что произведение бесконечно малой последовательности на сходящуюся последовательность является бесконечно малой последовательностью. Впрочем, это легко доказать и без обращения к теореме 2.8.

Аналогично теореме 2.8 доказывается следующее утверждение.

Теорема 2.9. Если $\beta_n \rightarrow \infty$ и существует число $c > 0$ такое, что $|x_n| \geq c$ для всех n , больших некоторого номера k , то произведение $\beta_n x_n \rightarrow \infty$.

Теорему 2.9 можно сформулировать так: *произведение бесконечно большой последовательности на отделённую от нуля последовательность есть бесконечно большая последовательность.*

Приведём два примера на использование теорем 2.8 и 2.9 для вычисления пределов последовательностей.

Пример 2.7. Последовательность $\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0$, так как $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ (см. пример 2.5), а $|\sin n| \leq 1$ для любых n .

Пример 2.8. $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \cos 3n)n^2 \rightarrow \infty$, так как $n^2 \rightarrow \infty$, а $|2 + \cos 3n| \geq 1$ для любых n , т.е. последовательность $2 + \cos 3n$ отделена от нуля.

2.3. Арифметические действия над сходящимися последовательностями

Выше (см. пример 2.5) на основании определения предела последовательности было доказано, что предел $x_n = 1/n$ равен 0. Однако для последовательности x_n , заданной более сложной формулой, доказательство равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ на основе определения предела является обычно непростой задачей. Например, попробуйте доказать, пользуясь определением предела, что $\frac{2n^3 - 4n - 7}{n^3 - n^2 + 3} \rightarrow 2$.

Поэтому естественно попытаться обосновать некоторые правила, позволяющие задачу вычисления предела последовательности сводить к фактам существования и знания значений предела лишь нескольких последовательностей.

Пусть заданы две последовательности x_n и y_n . Образует из них новые последовательности $x_n + y_n$, $x_n - y_n$, $x_n y_n$ и $\frac{x_n}{y_n}$, которые называются, соответственно, *суммой*, *разностью*, *произведением* и *частным* заданных последовательностей. В случае частного предполагается, что $y_n \neq 0$ для всех $n = 1, 2, 3, \dots$ или, начиная с некоторого номера.

Теорема 2.10. Пусть x_n и y_n – сходящиеся последовательности. Тогда их сумма, разность, произведение и частное также являются сходящимися последовательностями и верны равенства:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \quad (\text{если } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0).$$

◀Докажем теорему для случая частного последовательностей. Для случаев суммы, разности и произведения рассуждения аналогичны и даже проще. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Тогда, по теореме 2.6,

существуют такие бесконечно малые последовательности α_n и β_n , что $x_n = a + \alpha_n$ и $y_n = b + \beta_n$. Поэтому

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{x_n b - y_n a}{y_n b} = \frac{(a + \alpha_n)b - (b + \beta_n)a}{y_n b} = \frac{\alpha_n b - \beta_n a}{y_n b}.$$

В силу теорем 2.7 и 2.8 последовательность $\alpha_n b - \beta_n a \rightarrow 0$. Так как

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0$, то последовательность $\frac{1}{y_n b}$ ограничена (см. замечание

к теореме 2.5). Поэтому $\frac{\alpha_n b - \beta_n a}{y_n b}$ есть бесконечно малая последова-

тельность и, значит, $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{a}{b}$. ►

Пример 2.9. Найти предел последовательности $\frac{2n^3 - 4n - 7}{n^3 - n^2 + 3}$.

◄Последовательности $2n^3 - 4n - 7$ и $n^3 - n^2 + 3$ не являются сходящимися. Поэтому сразу применить свойство о пределе частного нельзя. Преобразуем дробь, вынося за скобки в числителе и в знаменателе n^3 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 4n - 7}{n^3 - n^2 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(2 - \frac{4}{n^2} - \frac{7}{n^3} \right)}{n^3 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^3} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{4}{n^2} - \frac{7}{n^3}}{1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^3}}.$$

Так как ранее было доказано, что $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, то, применив свойства беско-

нечно малых, заключаем, что последовательности $\frac{4}{n^2}$, $\frac{1}{n^3}$, $\frac{7}{n^3}$ также стремятся к нулю. Теперь в силу арифметических свойств предела последовательности (теорема 2.10) получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 4n - 7}{n^3 - n^2 + 3} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{4}{n^2} - \frac{7}{n^3} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^3} \right)} = 2. \blacktriangleright$$

2.4. Неопределённые выражения

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Если $b \neq 0$, то заключаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} \text{ без всякой дополнительной информации о поведении по-}$$

следовательностей x_n и y_n . Если $b = 0$, $a \neq 0$, то из свойств бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей также сразу

получаем $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$. Если $a = b = 0$, то невозможно сразу, как выше,

сделать вывод о существовании предела частного последовательностей

и его значения. Например: если $x_n = \frac{3}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, то $\frac{x_n}{y_n} = 3 \rightarrow 3$; если

$$x_n = \frac{3}{n^2}, \quad y_n = \frac{1}{n}, \quad \text{то} \quad \frac{x_n}{y_n} = \frac{3}{n} \rightarrow 0; \quad \text{если} \quad x_n = \frac{3}{n}, \quad y_n = \frac{1}{n^2}, \quad \text{то}$$

$$\frac{x_n}{y_n} = 3n \rightarrow +\infty; \quad \text{если} \quad x_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad y_n = \frac{1}{n}, \quad \text{то} \quad \frac{x_n}{y_n} = (-1)^n, \quad \text{и предел}$$

не существует. Поэтому отношение x_n / y_n в случае $x_n \rightarrow 0$ и $y_n \rightarrow 0$

называют *неопределённостью вида* $\frac{0}{0}$.

Аналогично, если $x_n \rightarrow \infty$ и $y_n \rightarrow \infty$, то отношение x_n / y_n назы-

вают *неопределённостью вида* $\frac{\infty}{\infty}$. Произведение $x_n y_n$ будет *неопреде-*

лённостью вида $0 \cdot \infty$, если $x_n \rightarrow 0$ и $y_n \rightarrow \infty$. Если $x_n \rightarrow \infty$ и

$y_n \rightarrow \infty$ или $x_n \rightarrow +\infty$, а $y_n \rightarrow -\infty$, то сумму $x_n + y_n$ называют *неопределённостью вида $\infty - \infty$* .

Раскрыть неопределённость – это значит найти предел соответствующего выражения (или доказать, что он не существует), используя сведения о характере изменения последовательностей, входящих в выражение (например, знание формул общих членов последовательностей). Часто это не просто и требует большой изобретательности.

Пример 2.10. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+4} - \sqrt{n})$.

◀Так как $\sqrt{n+4} \rightarrow +\infty$ и $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$, то выражение $\sqrt{n+4} - \sqrt{n}$ является неопределённостью вида $\infty - \infty$. Для её раскрытия умножим и разделим выражение $\sqrt{n+4} - \sqrt{n}$ на $\sqrt{n+4} + \sqrt{n}$ (в таких случаях говорят, что умножим и разделим на сопряжённое выражение):

$$\sqrt{n+4} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+4} - \sqrt{n})(\sqrt{n+4} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow +\infty$. Значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+4} - \sqrt{n}) = 0$. ▶

Пример 2.11. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - \sqrt{n^2 + 1})$.

◀Как и в примере 2.10, выражение $\sqrt{n^2 + 4n} - \sqrt{n^2 + 1}$ является неопределённостью вида $\infty - \infty$ при $n \rightarrow +\infty$. Для её раскрытия также умножим и разделим заданное выражение на сопряжённое ему:

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + 4n} - \sqrt{n^2 + 1} &= \frac{(\sqrt{n^2 + 4n} - \sqrt{n^2 + 1})(\sqrt{n^2 + 4n} + \sqrt{n^2 + 1})}{\sqrt{n^2 + 4n} + \sqrt{n^2 + 1}} = \\ &= \frac{4n - 1}{\sqrt{n^2 + 4n} + \sqrt{n^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Получили выражение, являющееся неопределённостью вида $\frac{\infty}{\infty}$ при $n \rightarrow +\infty$. Вынесем в числителе n за скобки, а в знаменателе – n^2 из-под знака радикала. Получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left(4-\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 2. \blacktriangleright \end{aligned}$$

2.5. Существование предела последовательности

Пусть задана произвольная последовательность z_n . Рассмотрим следующий важный вопрос: при каких условиях на поведение своих членов последовательность z_n имеет конечный предел?

Теорема 2.6 утверждает, что если z_n «зажать» между двумя последовательностями x_n и y_n , сходящимися к одному и тому же числу a , то z_n будет также сходящейся, причём к числу a . Сформулируем ещё две теоремы о существовании предела последовательности. Доказательство их можно изучить в более полных курсах математического анализа.

1. Предел монотонной последовательности

Определение. Последовательность x_n называется *возрастающей* (неубывающей), если $x_n < x_{n+1}$ ($x_n \leq x_{n+1}$) для любого $n = 1, 2, 3, \dots$.

Определение. Последовательность x_n называется *убывающей* (невозрастающей), если $x_n > x_{n+1}$ ($x_n \geq x_{n+1}$) для любого $n = 1, 2, 3, \dots$.

Возрастающие, убывающие, невозрастающие, неубывающие последовательности называются *монотонными*.

Например, последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ – убывающая, последовательность $\{[\log_2 n]\} = \{0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, \dots\}$ – неубывающая (напомним, $[x]$ обозначает *целую часть* числа x , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x).

Теорема 2.11. Если неубывающая (невозрастающая) последовательность ограничена сверху (снизу), то она имеет предел.

В данном пособии эта теорема не доказывается.

Из теоремы 2.11 и теоремы 2.4 следует, что **для монотонной последовательности ограниченность является необходимым и достаточным условием её сходимости**.

Теорема 2.11 только утверждает существование предела у монотонной ограниченной последовательности, но в ряде случаев, зная, что предел последовательности существует, его легко и вычислить.

Пример 2.12. Найти предел последовательности $x_n = \frac{n}{2^n}$.

◀Заданная последовательность является невозрастающей, так как $x_n - x_{n+1} = \frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{2n - n - 1}{2^{n+1}} = \frac{n-1}{2^{n+1}} \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, и ограниченной снизу числом 0. Следовательно, она имеет предел. Обозначим $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Отметим, что последовательность x_{n+1} также имеет пре-

делом число a . Представим $x_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2n} x_n$. Перейдя здесь слева и справа к пределу при $n \rightarrow +\infty$, получим $a = \frac{1}{2} a$. Отсюда $a = 0$. ▶

2. Критерий Коши сходимости последовательности

Определение. Последовательность x_n называется *фундаментальной*, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдётся

число $N(\varepsilon)$ такое, что для всех номеров $n, m > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Фундаментальную последовательность называют также последовательностью, удовлетворяющей *условию Коши* ^{*}.

Верна следующая теорема.

Теорема 2.12. (Критерий Коши существования предела.) Для того чтобы последовательность имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Таким образом, всякая сходящаяся последовательность является примером фундаментальной последовательности, а всякая расходящаяся – нефундаментальной.

2.6. Число e

Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Докажем, применяя теорему 2.11, что она имеет предел. Для этого покажем, что последовательность x_n возрастающая и ограничена сверху.

Воспользуемся формулой *бинома Ньютона* ^{**}:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b^1 + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1))}{n!}b^n.$$

Применяя её, получаем:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1))}{n!} \left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

^{*} Коши Огюстен Луи (1789–1857) – французский математик.

^{**} Ньютон Исаак (1643–1727) – английский физик и математик.

Разделив в каждом слагаемом, начиная с третьего, каждый множитель вида $(n-k)$ на n , представим x_n следующим образом:

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \quad (2.3)$$

Так как $0 < 1 - \frac{k}{n} < 1$ для любого $k = 1, 2, \dots, n-1$ и $\frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} \leq \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2} = \frac{1}{2^{k-1}}$, то из равенства (2.3) и формулы суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии следует

$$\begin{aligned} x_n &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < \\ &< 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots\right) = 1 + \frac{1}{1 - 1/2} = 3. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность x_n ограничена сверху числом 3.

Очевидно, что $x_n \geq 2$ для любого n .

Покажем, что x_n возрастающая. По формуле (2.3) запишем x_{n+1} :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \\ &+ \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right). \quad (2.4) \end{aligned}$$

Из равенств (2.3) и (2.4) следует, что $x_n < x_{n+1}$, так как каждый множитель вида $1 - \frac{k}{n+1}$ больше множителя $1 - \frac{k}{n}$ и, кроме того, в равенстве (2.4) на одно положительное слагаемое больше, чем в (2.3).

Итак, последовательность $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ возрастает и ограничена сверху.

Следовательно, она имеет предел. Обозначают этот предел буквой e :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \text{ Число } e \text{ иррациональное, его ещё называют } \textit{неперо-}$$

вым числом. Из рассуждений выше следует, что $2 \leq e \leq 3$, за его приближённое значение можно взять число 2,7.

Пример 2.13. Банк предлагает размещать вклады на длительный срок под 5% годовых. Оцените, во сколько раз увеличится вклад, размещённый на 20 лет.

◀ Пусть первоначальный размер вклада равен A . Тогда после первого года размер вклада станет $A\left(1 + \frac{1}{20}\right)$, после второго – $A\left(1 + \frac{1}{20}\right)^2$, а после 20-го – $A\left(1 + \frac{1}{20}\right)^{20}$. Таким образом, за 20 лет вклад вырастет в $\left(1 + \frac{1}{20}\right)^{20} \approx e \approx 2,7$ раза. Точное значение $(1 + 0,05)^{20} = 2,653\dots$ ▶

2.7. Предел функции в точке

1. Определения предела функции в точке

В ряде задач, в том числе практических, требуется найти предельное значение некоторой функции при стремлении аргумента к определённом числу. Для их успешного решения необходимо придать строгий смысл интуитивным представлениям о пределе функции в точке.

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале, содержащем точку a , за исключением, быть может, самой точки a .

Определение. Число A называется *пределом функции $f(x)$ в точке a* , если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдётся зависящее от него число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \neq a$, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Отметим, что в этом определении, как и в дальнейшем в аналогичных ситуациях, предполагается, что значения аргумента x , удовлетворяющие неравенству $|x - a| < \delta$, принадлежат интервалу, на котором определена функция.

То, что число A есть предел функции $f(x)$ в точке a , записывают следующим образом: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ или $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow a$.

Данное выше определение предела функции в точке часто называют *определением предела по Коши* или на « ε - δ языке».

Неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$ и $|x - a| < \delta$ равносильны двойным неравенствам: $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ и $a - \delta < x < a + \delta$ соответственно. Поэтому определение предела по Коши можно сформулировать в терминах окрестностей: *число A есть предел функции $f(x)$ в точке a , если для любой ε -окрестности числа A найдётся δ -окрестность числа a такая, что для любого аргумента $x \neq a$, принадлежащего δ -окрестности числа a , соответствующее значение функции $f(x)$ принадлежит ε -окрестности числа A .* Иллюстрация этого определения дана на рис.2.3. Для выбранной произвольным образом ε -окрестности числа A на оси Oy указана δ -окрестность числа a на оси Ox такая, что все точки $(x, f(x))$ графика функции для аргументов $x \neq a$ и принадлежащих δ -окрестности числа a лежат в заштрихованном прямоугольнике.

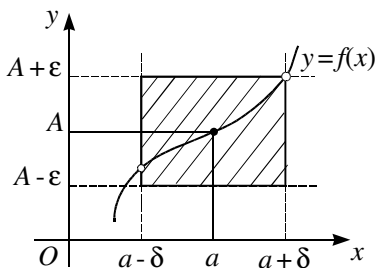


Рис.2.3.

Сформулируем ещё одно, эквивалентное, определение предела функции, которое называют *определением предела функции в точке по Гейне** или на «языке последовательностей».

Определение. Число A называется *пределом функции $f(x)$ в точке a* , если для любой последовательности аргументов $x_n \rightarrow a$, $x_n \neq a$, соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ сходится к числу A .

* Гейне Генрих Эдуард (1821–1881) – немецкий математик.

Вместо фразы *число A есть предел функции $f(x)$ в точке a* говорят также, что *A есть предел функции $f(x)$ при x , стремящемся к a* . Последняя фраза более точно отражает смысл понятия предела функции, так как подчёркивает, что изучается поведение значений функции *при приближении аргумента к точке*, но не в самой точке. Это обстоятельство является очень важным при введении понятия производной функции (см. подразд. 3.1).

В зависимости от ситуации одно определение предела функции в точке может оказаться удобнее другого. Определение по Гейне позволяет использовать доказанные ранее утверждения для предела последовательности при решении задач относительно предела функции.

Пример 2.14. Вычислить $\lim_{x \rightarrow a} x^2$.

◀Используем определение в терминах последовательностей. Пусть x_n – произвольная последовательность, стремящаяся к a . Тогда в силу арифметических свойств предела последовательности (теорема 2.10) $x_n^2 = x_n \cdot x_n \rightarrow a^2$. Таким образом, $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$. Отметим, что доказательство этого факта с помощью определения по Коши требует более тонких рассуждений. ▶

Пример 2.15. Доказать, что функция $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ не имеет предела при $x \rightarrow 0$ (рис.2.4).

◀Возьмём последовательность $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Ей соответствует последовательность значений функции $f(x_n) = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right) = (-1)^n$, которая не имеет предела. Следовательно, в силу определения по Гейне функция $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ не имеет предела в точке $x = 0$. ▶

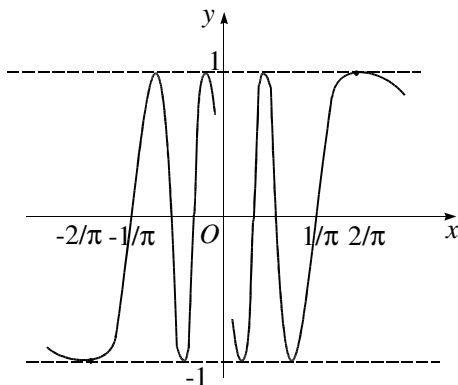


Рис.2.4.

Пример 2.16. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$.

◀Рассмотрим функции $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$ и $g(x) = x^2$. Это различные функции: функция $f(x)$ не определена в точке $x = 2$, а функция $g(x)$ определена в ней. Но $f(x) = g(x)$ для $x \neq 2$, а существование и значение предела функции в точке *не зависят* от поведения функции в самой точке. Поэтому $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$. Так как $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ (см. пример 2.14), то и $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2} = 4$. ▶

Дадим определение предела функции для случая стремления аргумента к бесконечности. При этом функцию $f(x)$ считаем определённой для всех x , превосходящих, по модулю, некоторое число.

Определение. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдётся зависящее от него число $K > 0$ такое, что для всех x , удовлетворяющих условию $|x| > K$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Понятие предела функции при $x \rightarrow \infty$ нетрудно переформулировать на случаи $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$: нужно лишь заменить неравенство

$|x| > K$ на неравенство $x > K$ для случая $x \rightarrow +\infty$, и на неравенство $x < -K$ для случая $x \rightarrow -\infty$. На рис.2.5 дана графическая иллюстрация

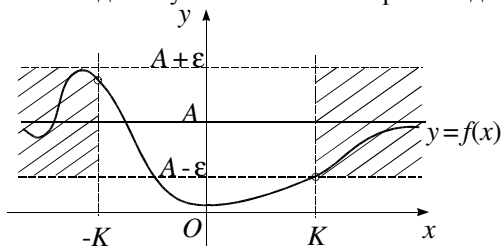


Рис.2.5

определения предела функции при $x \rightarrow \infty$: для выбранной произвольным образом ε -окрестности числа A на оси Oy указаны точки $\pm K$ на оси Ox такие, что все точки графика функции $y = f(x)$ для аргументов $|x| > K$ лежат в заштри-

хованной полосе (иногда говорят *лежат в «ε-коридоре»*).

На языке последовательностей определение $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ формулируется так: число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если для любой последовательности $x_n \rightarrow \infty$ соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ сходится к числу A . Аналогичным образом в терминах последовательностей формулируются определения $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

Пример 2.17. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$.

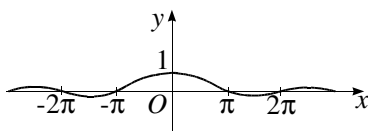


Рис.2.6.

◀ Возьмём произвольную последовательность $x_n \rightarrow \infty$. Тогда последовательность $1/x_n \rightarrow 0$, а последовательность $\sin x_n$ ограниченная, так как $|\sin x| \leq 1$ для любого x . Следова-

тельно, по теореме 2.8 последовательность $f(x_n) = \frac{1}{x_n} \sin x_n \rightarrow 0$. Та-

ким образом, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ (рис.2.6). ▶

2. Свойства предела функции в точке

Ниже излагаются свойства предела функции в точке a . Для сокращения записей a будет означать как число, так и символы ∞ , $+\infty$, $-\infty$. Доказательство ряда свойств предела функции в точке нетрудно получить, применяя определение предела по Гейне и соответствующие свойства сходящихся последовательностей.

Теорема 2.13. Если функция имеет предел в точке, то он единственный.

◀Предположим, что функция имеет два различных предела: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$. Возьмём произвольную последовательность $x_n \rightarrow a$, $x_n \neq a$. Тогда, по определению предела функции по Гейне, последовательность $f(x_n)$ должна стремиться к двум различным числам: A и B . Но этого не может быть в силу свойства единственности предела для последовательностей (см. теорему 2.1). ▶

Аналогичным образом доказываются следующие теоремы.

Теорема 2.14. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ и $f(x) \leq g(x)$ в некоторой окрестности a , $x \neq a$, то $A \leq B$.

Теорема 2.15. Пусть $f(x) \leq z(x) \leq g(x)$ в некоторой окрестности a , $x \neq a$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$. Тогда функция $z(x)$ также имеет предел при $x \rightarrow a$, причём равный A .

Теорема 2.16. Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$. Тогда сумма, разность, произведение и частное функций также имеют пределы при $x \rightarrow a$ и верны равенства:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B, \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = AB, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \\ (\text{если } B \neq 0).$$

Как и в случае последовательностей, теорема 2.16 позволяет сводить вычисление пределов достаточно сложных выражений к пределам нескольких функций.

Пример 2.18. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - x + 1}{3x^2 - 5x}$.

◀В силу теоремы 2.16 $\lim_{x \rightarrow 3} x^n = 3^n$. Используя ещё несколько раз теорему 2.16, заключаем сначала, что $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - x + 1) = 16$, $\lim_{x \rightarrow 3} (3x^2 - 5x) = 12$, а затем, что $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - x + 1}{3x^2 - 5x} = \frac{4}{3}$. ▶

Следующие два важных свойства предела функции докажем с помощью определения по Коши. Далее, для сокращения записей $U(a)$ означает *окрестность точки a* , т.е. интервал, содержащий точку a . Окрестность точки a , из которой исключена сама точка, называют *проколотой окрестностью* точки a и обозначают $\dot{U}(a)$.

Теорема 2.17. Пусть функция имеет конечный предел в точке a . Тогда существует проколотая окрестность точки a , в которой функция ограничена.

◀Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$. Возьмём $\varepsilon = 1$. Тогда, в силу определения предела функции по Коши, существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \neq a$, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < 1$. Так как неравенство $|f(x) - A| < 1$ равносильно двойному неравенству $A - 1 < f(x) < A + 1$, то заключаем, что на множестве $\dot{U}(a) = \{a - \delta < x < a + \delta, x \neq a\}$ множество значений функции ограничено как снизу, так и сверху, т.е. функция ограничена на $\dot{U}(a)$. ▶

Теорема 2.18. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, A \neq 0$, то существует окрестность $\dot{U}(a)$ такая, что для всех $x \in \dot{U}(a)$ выполняется неравенство $f(x) > A/2$, если $A > 0$, и $f(x) < A/2$, если $A < 0$.

◀Положим $\varepsilon = |A|/2 > 0$, так как $A \neq 0$. Для этого ε существует окрестность $\dot{U}(a)$ такая, что для $x \in \dot{U}(a)$ выполняется неравенство

$|f(x) - A| < |A|/2$, или $A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2}$. Отсюда для любого $x \in \dot{U}(a)$ выполняется неравенство $f(x) > A - \frac{|A|}{2} = \frac{A}{2}$, если $A > 0$, и $f(x) < A + \frac{|A|}{2} = \frac{A}{2}$, если $A < 0$. ►

Замечание. Теоремы 2.17, 2.18 верны и для случаев $a = \infty$, $a = +\infty$ и $a = -\infty$, если под окрестностью ∞ понимать множество $(-\infty; -K) \cup (K; +\infty)$, $+\infty$ – интервал $(K; +\infty)$, $-\infty$ – интервал $(-\infty; -K)$, $K > 0$.

3. Существование предела функции в точке

Сформулируем критерий Коши существования предела функции в точке.

Теорема 2.19. Для того чтобы функция $f(x)$ имела конечный предел при $x \rightarrow a$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ существовала окрестность $\dot{U}(a)$ такая, что для любых точек $x', x'' \in \dot{U}(a)$ выполняется неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

4. Односторонние пределы

Рассмотрим функцию $\text{sign } x =$

$$= \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$
 (читается *сигнум икс*). Она

не имеет предела в точке 0 (рис.2.7). Однако нетрудно видеть, что эта функция стремится к 1 и, соответственно, к -1, если x устремлять к 0 только

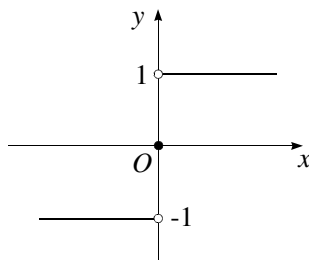


Рис.2.7.

справа или, соответственно, только слева. В таком случае говорят, что функция имеет в точке *односторонние пределы*.

Определение. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке a *справа (слева)*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся зависящее от него число $\delta > 0$ такое, что для всех x , удовлетворяющих условию $0 < x - a < \delta$ ($-\delta < x - a < 0$), выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Односторонние пределы обозначают так: $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ – справа, $f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ – слева. Таким образом, $\text{sign}(0+0) = 1$ и $\text{sign}(0-0) = -1$.

Нетрудно доказать, что функция имеет предел в точке тогда и только тогда, когда существуют односторонние пределы в этой точке и они равны.

5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Из множества функций, имеющих конечный предел, выделяют особо функции, стремящиеся к нулю при приближении аргумента к некоторой точке.

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$.

Отметим, что, называя какую-либо функцию бесконечно малой, необходимо *обязательно* указывать, к чему стремится аргумент. Например, функция x^2 будет бесконечно малой при $x \rightarrow 0$, но не будет бесконечно малой, если $x \rightarrow a \neq 0$.

Как и в случае последовательностей, справедлива следующая простая, но важная теорема, устанавливающая связь между существованием предела функции в точке и бесконечно малыми функциями.

Теорема 2.20. Для того чтобы число A являлось пределом функции $f(x)$ в точке a , необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки a можно было представить в виде $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$.

Определение. Функция $\beta(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \rightarrow a$, если для любого сколь угодно большого числа M найдётся окрестность $U(a)$, что $|\beta(x)| > M$ для всех $x \in U(a)$, $x \neq a$.

В терминах последовательностей определение бесконечно большой функции формулируется так: функция $\beta(x)$ называется бесконечно большой при $x \rightarrow a$, если для любой последовательности $x_n \rightarrow a$, $x_n \neq a$, соответствующая последовательность значений функции $\beta(x_n) \rightarrow \infty$.

Если функция $\beta(x)$ *бесконечно большая* при $x \rightarrow a$, то пишут $\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = \infty$ (говорят также, что $\beta(x)$ *стремится к бесконечности* при $x \rightarrow a$).

Бесконечно большой будет функция $\frac{1}{x}$ при $x \rightarrow 0$, но заметим, что она будет бесконечно малой при $x \rightarrow \infty$ (рис.2.8).

Если функция $\beta(x)$ *стремится к бесконечности* при $x \rightarrow a$ и при приближении к a начинает принимать только положительные или только отрицательные значения, то пишут $\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = +\infty$ и, соответствен-

но, $\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = -\infty$.

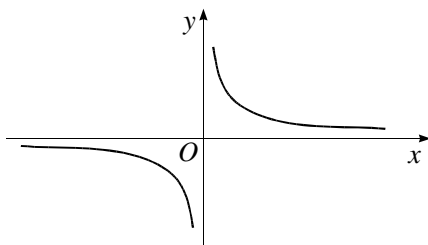


Рис.2.8.

Пусть $\alpha(x)$ есть бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$. Тогда функция $1/\alpha(x)$ будет бесконечно большой при $x \rightarrow a$. Верно и обратное, если $\beta(x)$ – бесконечно большая функция при $x \rightarrow a$, то функция $1/\beta(x)$ есть бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Используя определение бесконечно большой и бесконечно малой функций в терминах последовательностей и свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей, заключаем, что справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.21. Если функция $\alpha(x)$ бесконечно малая при $x \rightarrow a$, а $f(x)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a , то $\lim_{x \rightarrow a} f(x)\alpha(x) = 0$.

Теорема 2.22. Если функция $\beta(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a$, а $|f(x)| \geq c > 0$ для всех x , принадлежащих некоторой проколотой окрестности точки a , то $\lim_{x \rightarrow a} f(x)\beta(x) = \infty$.

Из теорем 2.18 и 2.22 следует, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x)\beta(x) = \infty$, если $\beta(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a$, а $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, A \neq 0$.

Теоремы 2.21 и 2.22 применяются при раскрытии неопределённостей.

Пример 2.19. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{5x^3 - 3x^3 \sin x}$.

◀Здесь числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности при $x \rightarrow \infty$. Поэтому теорему 2.16 применить нельзя. Преобразуем дробь, вынося в знаменателе степень x^3 :

$$\frac{2x}{5x^3 - 3x^3 \sin x} = \frac{2x}{x^3(5 - 3\sin x)} = \frac{2}{x^2(5 - 3\sin x)}.$$

Функция x^2 бесконечно большая при $x \rightarrow \infty$, а $|5 - 3\sin x| \geq 2$ для любых x . Следовательно, в силу теоремы 2.22 функция $\frac{2}{x^2(5 - 3\sin x)} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Величина, обратная бесконечно большой, является бесконечно малой. Таким образом, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{5x^3 - 3x^3 \sin x} = 0$. ▶

2.8. Замечательные пределы

В этом подразделе будут рассмотрены два важных предела. При этом будет использоваться непрерывность основных элементарных функций (см. подразд. 2.10).

1. Первый замечательный предел

Теорема 2.23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

◀ Так как $\sin x \rightarrow 0$, когда $x \rightarrow 0$, то $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ есть неопределённость вида $0/0$. Раскроем её. Сначала докажем, что для $0 < x < \pi/2$

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \quad (2.5)$$

На декартовой плоскости *Oxy* рассмотрим окружность радиуса 1 с центром в точке *O*. Пусть *A* – точка с координатами (1, 0), точка *M* лежит на окружности, причём радианная мера угла *MOA* равна *x*, точка *B* – основание перпендикуляра, опущенного из точки *M* на отрезок *OA*, а *C* – точка пересечения перпендикуляра к отрезку *OA* с основанием *A* с продолжением отрезка *OM* (рис.2.9). Из рисунка следует, что $S_{\triangle OMA} < S_{\text{сектора } OMA} < S_{\triangle OCA}$. Отрезок *BM* является высотой треугольника *OMA*, длина его равна $\sin x$, отрезок *BC*, имеющий длину $\operatorname{tg} x$, есть высота треугольника *OCA*, а длина отрезка *OA* равна 1. Поэтому из формул площади треугольника и кругового сектора полу-

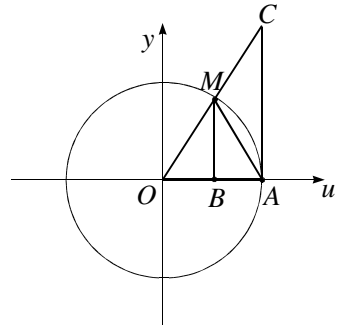


Рис.2.9.

чаем: $S_{\triangle OCA} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$, $S_{\text{сектора } OMA} = \frac{1}{2} x$ и тем самым неравенства (2.5) для $0 < x < \pi/2$ доказаны.

Разделим неравенства (2.5) на $\sin x > 0$. Получим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \text{ или } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \quad (2.6)$$

Функции $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ чётные. Поэтому неравенства (2.6) верны и для $-\pi/2 < x < 0$. В силу непрерывности функции косинус (см. подразд. 2.10) имеем: $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$. Очевидно, что $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$.

Тогда, по теореме 2.15 о пределе «зажатой» функции, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ существует и также равен 1. ►

При вычислении пределов тригонометрических выражений первый замечательный предел часто используется в следующей форме:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1, \text{ если } \alpha(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

Пример 2.20. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin(\sqrt{x}-2)}{x-4}$.

◄ Так как $\sqrt{x}-2 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 4$, то $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2} = 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin(\sqrt{x}-2)}{x-4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}. \text{ ►} \end{aligned}$$

2. Второй замечательный предел

Теорема 2.24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

◄ Если использовать определение предела функции по Гейне, то нужно доказать, что для любой последовательности $x_n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e. \quad (2.7)$$

Для доказательства равенства (2.7) достаточно его доказать в двух случаях: $x_n \rightarrow +\infty$ и $x_n \rightarrow -\infty$.

1-й случай. Если $x_n = n$, то равенство (2.7) справедливо (см. подразд. 2.6). Оно также будет верным, если x_n – последовательность из

натуральных чисел, стремящаяся к $+\infty$, но не обязательно возрастающая.

Пусть теперь x_n – произвольная последовательность действительных чисел, стремящаяся к $+\infty$. Считая $x_n \geq 1$, сопоставим последовательности x_n последовательность из натуральных чисел $k_n = [x_n]$ – целых частей x_n . По определению целой части числа справедливо двойное неравенство: $k_n \leq x_n < k_n + 1$. Поэтому

$$1 + \frac{1}{k_n + 1} < 1 + \frac{1}{x_n} \leq 1 + \frac{1}{k_n}$$

и из свойств степеней с основаниями, большими единицы, вытекает:

$$\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n} < \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} < \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n + 1}. \quad (2.8)$$

Так как для любой последовательности из натуральных чисел, стремящейся к $+\infty$, равенство (2.7) верно, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n + 1} \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{-1} = e$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right) = e.$$

Поэтому, по теореме 2.3 о пределе «сжатой» последовательности, из неравенств (2.8) следует справедливость равенства (2.7) в первом случае.

2-й случай. Пусть $x_n \rightarrow -\infty$. Положим $t_n = -x_n \rightarrow +\infty$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} &= \left(1 - \frac{1}{t_n}\right)^{-t_n} = \left(\frac{t_n}{t_n - 1}\right)^{t_n} = \left(1 + \frac{1}{t_n - 1}\right)^{t_n} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{t_n - 1}\right)^{t_n - 1} \left(1 + \frac{1}{t_n - 1}\right). \end{aligned}$$

Так как, по доказанному выше $\left(1 + \frac{1}{t_n - 1}\right)^{t_n - 1} \rightarrow e$ при $t_n \rightarrow +\infty$, то заключаем, что равенство (2.7) верно и во 2-м случае. ►

Если выполнить замену $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$, то второй замечательный предел можно записать в виде

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e. \quad (2.9)$$

3. Следствия из второго замечательного предела

Следствие 2.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$.

◄Докажем сначала первое равенство. Используя свойства логарифмов, непрерывность логарифмической функции и равенство (2.9), получим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x} = \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = \ln e = 1. \end{aligned}$$

Для доказательства второго равенства перейдём в числителе дроби к натуральным логарифмам

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x \ln a} = \frac{1}{\ln a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}. \blacktriangleright$$

Следствие 2.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

◄Положим $t = a^x - 1$. Так как показательная функция непрерывна и $a^0 = 1$, то $t \rightarrow 0$, если $x \rightarrow 0$. Далее, логарифмируя равенство $a^x = 1+t$, найдём $x = \log_a(1+t)$. Поэтому, в силу следствия 2.1,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \ln a. \text{ Второе соотношение следует из пер-}$$

вого, если взять $a = e$. ►

Второй замечательный предел и следствия из него используются для раскрытия неопределённостей вида 1^∞ , ∞^0 , 0^0 . При этом часто применяется соотношение

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = A^B, \quad (2.10)$$

если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ и предел $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)$ не является неопределённостью. Равенство (2.10) вытекает из основного логарифмического тождества $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$ и непрерывности показательной функции.

Пример 2.21. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{2/x}$.

◀Здесь имеем неопределённость вида 1^∞ . Преобразуем:
 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{2 \sin x / (x \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left((1 + \sin x)^{1/\sin x} \right)^{2 \sin x / x}$. Теперь, используя первый и второй замечательные пределы и равенство (2.10), находим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{2/x} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{1/\sin x} \right)^{\lim_{x \rightarrow 0} 2 \sin x / x} = e^2. \blacktriangleright$$

2.9. Сравнение бесконечно малых функций

Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ стремятся к нулю при $x \rightarrow a$. Здесь a может означать как число, так и символы ∞ , $+\infty$, $-\infty$. Однако скорость стремления функций к нулю может быть различная. Например, ясно, что при $x \rightarrow 0$ функция $\alpha(x) = x^2$ стремится к нулю быстрее, чем $\beta(x) = \sin x$ (рис.2.10). Ниже рассматривается способ сравнения скорости стремления функций к нулю через вычисление предела отношения функций.

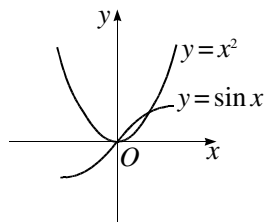


Рис.2.10.

Определение. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то говорят, что функция $\alpha(x)$ есть *о-малое* относительно $\beta(x)$ при $x \rightarrow a$ и пишут $\alpha(x) = o(\beta(x))$, $x \rightarrow a$.

Например, $x^2 = o(\sin x)$, $x \rightarrow 0$, а $\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \rightarrow \infty$.

Если $\alpha(x) = o(\beta(x))$, $x \rightarrow a$, то функцию $\alpha(x)$ называют также *бесконечно малой более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$* , при $x \rightarrow a$.

Определение. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *эквивалентными (асимптотически равными) при $x \rightarrow a$* и пишут $\alpha(x) \approx \beta(x)$, $x \rightarrow a$.

Важные примеры эквивалентных функций получаются из замечательных пределов и следствий из них:

$$\sin x \approx x, x \rightarrow 0; e^x - 1 \approx x, x \rightarrow 0; a^x - 1 \approx x \ln a, x \rightarrow 0; \quad (2.11)$$

$$\ln(1+x) \approx x, x \rightarrow 0; \log_a(1+x) \approx \frac{x}{\ln a}, x \rightarrow 0. \quad (2.12)$$

Докажем теорему о возможности замены функций на их эквивалентные при вычислении пределов частного и произведения функций.

Теорема 2.25. Если $\alpha(x) \approx \alpha_1(x)$, $\beta(x) \approx \beta_1(x)$, $x \rightarrow a$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow a} \alpha_1(x) \beta_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) \beta(x).$$

► Рассмотрим случай частного функций. Пусть, например, существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$. Выполняя очевидные преобразования, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)} \cdot \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \frac{\beta(x)}{\beta_1(x)} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\beta_1(x)} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot 1,$$

т.е. предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ существует и равен $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

Аналогичными рассуждениями теорема доказывается для предела произведения функций. ►

Пример 2.22. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \cdot (e^{4x} - 1)}{\ln(1 + 2x^3)}$.

◄ Если $x \rightarrow 0$, то (см. формулы (2.11) и (2.12)) $\sin^2 x \approx x^2$, $e^{4x} - 1 \approx 4x$ и $\ln(1 + 2x^3) \approx 2x^3$. Поэтому $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \cdot (e^{4x} - 1)}{\ln(1 + 2x^3)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot 4x}{2x^3} = 2. \blacktriangleright$$

Отметим, что замена функций на эквивалентные в сумме, разности может привести к неверному результату.

Пример 2.23. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{\ln(1 + x^3)}$.

◄ $2 \sin x \approx 2x$ и $\sin 2x \approx 2x$ при $x \rightarrow 0$. Если выполнить эти замены в числителе дроби, то получим, что искомый предел равен нулю. Но это неверно. В самом деле:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot (1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3}.$$

Теперь, выполнив замены $\sin x \approx x$ и $\sin^2 \frac{x}{2} \approx \frac{x^2}{4}$, $x \rightarrow 0$, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot 2 \cdot \frac{x^2}{4}}{x^3} = 1. \blacktriangleright$$

Определение. Бесконечно малая $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой k -го порядка малости относительно бесконечно малой $\beta(x)$* при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c \neq 0$.

Пусть $a \neq \infty$ и $\beta(x) = x - a$. Если порядок малости функции $\alpha(x)$ относительно $x - a$ равен k , то $\alpha(x) \approx c(x - a)^k$, $x \rightarrow a$. Отсюда заключаем, что в окрестности точки a значения и график функции $\alpha(x)$ хорошо приближаются значениями и графиком степенной функции $c(x - a)^k$.

Так, из примера 2.23 следует, что $2 \sin x - \sin 2x \approx x^3$, $x \rightarrow 0$. Поэтому в малой окрестности нуля график функции $\alpha(x) = 2 \sin x - \sin 2x$ может быть заменен графиком функции x^3 . Если взять $x = 0,1$ (т.е. $\approx 5,7^\circ$), то без применения калькулятора, «устно», найдём $2 \sin 0,1 - \sin 0,2 \approx 0,1^3 = 0,001$. Погрешность вычисления будет менее 0,00001.

Понятие эквивалентности можно ввести не только для бесконечно малых функций. Например, можно писать $2x^2 + 3x + 1 \approx 2x^2$, $x \rightarrow \infty$, так как $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{2x^2} = 1$, писать $f(x) \approx A$, $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

2.10. Непрерывность функций

Рассматривая зависимость одной величины от другой, мы часто предполагаем, что малым изменениям независимой переменной соответствуют малые изменения функции. В таких случаях говорят, что зависимость непрерывная. Дадим этому интуитивному представлению строгое определение.

1. Понятие непрерывности функции

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале, содержащем точку a , включая саму точку a .

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке a* , если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Таким образом, непрерывная в точке функция имеет предел в точке, обязательно равный значению функции в самой точке. Так как $\lim_{x \rightarrow a} x = a$, то для непрерывной в точке a функции $f(x)$ выполняется соотношение

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} x\right), \quad (2.13)$$

т.е. для непрерывной функции можно переставлять местами знак предела и знак функции, что нами неоднократно использовалось в подразд. 2.8.

Вспоминая определения предела функции в точке, легко сформулировать определения непрерывности функции на « ε - δ языке» и в терминах последовательностей. Например, на « ε - δ языке» определение непрерывности записывается так: *функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a , если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдётся зависящее от него число $\delta > 0$ такое, что для всех x , удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*

Понятие непрерывности функции в точке может быть сформулировано в терминах приращений аргумента и функции.

Разность $\Delta x = x - a$ называют *приращением аргумента* в точке a . Разность

$$\Delta y = \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f(x) - f(a)$$

называют *приращением функции $y = f(x)$ в точке a* (соответствующим приращению аргумента Δx).

Так как условия $\Delta y = \Delta f \rightarrow 0$ и $f(x) \rightarrow f(a)$ при $\Delta x \rightarrow 0$ (т.е. $x \rightarrow a$) равносильны, то определение непрерывности функции может

быть записано так: функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке a , если

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0, \quad (2.14)$$

т.е. бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной справа (слева) в точке a , если $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$ (соответственно $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)$).

На рис.2.11,а изображена функция, непрерывная в точке a справа, а на рисунке 2.11,б – слева.

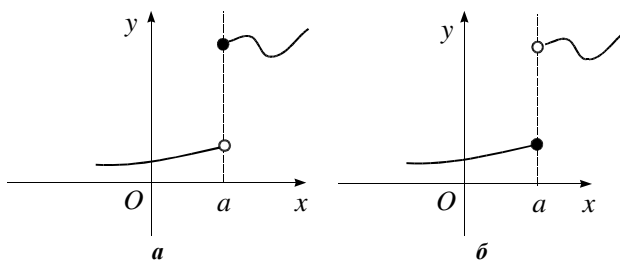


Рис.2.11.

Функция, заданная на интервале $(a; b)$ и непрерывная в каждой его точке, называется *непрерывной на интервале $(a; b)$* . Если функция задана на отрезке $[a; b]$, непрерывна на интервале $(a; b)$, в точке a непрерывна справа, а в точке b – слева, то функцию называют *непрерывной на отрезке $[a; b]$* . График непрерывной на промежутке функции есть *непрерывная кривая*.

2. Свойства непрерывных функций

Теорема 2.26. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a и $f(a) \neq 0$, то существует окрестность $U(a)$ такая, что для всех $x \in U(a)$ выполняется неравенство $f(x) > f(a)/2$, если $f(a) > 0$, и $f(x) < f(a)/2$, если $f(a) < 0$.

Теорема 2.27. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a , то их сумма, разность, произведение и частное ($g(a) \neq 0$) также непрерывны в точке a .

Теорема 2.28. Если функция непрерывна в точке a , то существует окрестность точки a , в которой функция ограничена.

Данные теоремы легко следуют из определения непрерывности и свойств предела функции. Докажем, для примера, теорему 2.27 в случае суммы функций. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a .

Тогда они имеют пределы в ней, причём $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$,

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$. Значит, по теореме 2.16,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) + g(a),$$

что и означает непрерывность суммы функций. ►

Теорема 2.29 (о непрерывности сложной функции). Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , а функция $x = \varphi(t)$ непрерывна в точке t_0 , причём $x_0 = \varphi(t_0)$, то сложная функция $F(t) = f(\varphi(t))$ непрерывна в точке t_0 .

◄ Так как для непрерывной функции можно менять местами знак функции и знак предела (см. равенство (2.13)), то

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} F(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} f(\varphi(t)) = f\left(\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t)\right) = f\left(\varphi\left(\lim_{t \rightarrow t_0} t\right)\right) = \\ &= f(\varphi(t_0)) = F(t_0), \end{aligned}$$

что и означает непрерывность функции $F(t)$. ►

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на некотором промежутке и имеет на нём однозначную обратную функцию $x = f^{-1}(y)$. Как отмечено в разделе 1, графики этих функций в прямоугольной системе координат Oxy совпадают, меняются только назначения осей: для прямой функции $y = f(x)$ осью аргументов является ось Ox , для обратной $x = f^{-1}(y)$ – ось Oy . Следовательно, если график прямой функции есть непрерывная кривая, то и график обратной функции также является непрерывной кривой. Поэтому, если *прямая функция является непре-*

рывной и имеет однозначную обратную, то обратная функция также является непрерывной. В частности, если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на промежутке D , то она обязательно имеет однозначную обратную функцию, которая является также строго монотонной и непрерывной на промежутке E , являющемся образом промежутка D (см. ниже теорему 2.33 и комментарии к ней).

3. Непрерывность элементарных функций

Напомним, что функции $y = c$ (постоянную), $y = x^a$ (степенную), $y = a^x$ (показательную), $y = \log_a x$ (логарифмическую), $y = \sin x$ (синус), $y = \cos x$ (косинус), $y = \operatorname{tg} x$ (тангенс), $y = \operatorname{ctg} x$ (котангенс), $y = \arcsin x$ (арксинус), $y = \arccos x$ (арккосинус), $y = \operatorname{arctg} x$ (арктангенс), $y = \operatorname{arcctg} x$ (арккотангенс) называют основными (простейшими) элементарными функциями.

Постоянная функция $y = C$ непрерывна в любой точке. Действительно, для этой функции $\Delta y = C - C = 0$ для любого приращения аргумента. Поэтому $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$. Следовательно (см. равенство (2.14)), постоянная функция непрерывна.

Функция $y = x$ также непрерывна в любой точке. В этом случае $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = x + \Delta x - x = \Delta x$. Значит, $\Delta y \rightarrow 0$, если $\Delta x \rightarrow 0$.

Из непрерывности постоянной функции, функции $y = x$ и теоремы 1.27 следует, что функции $y = Cx^2$, $y = Cx^3$ и т.д. будут непрерывны для любого x . Поэтому многочлен $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ является непрерывной функцией на всей числовой прямой, а рациональная функция, т. е. отношение двух многочленов, будет непрерывной во всех точках, в которых знаменатель не обращается в нуль.

Докажем, что функция $y = \sin x$ непрерывна для любого x . Имеем:

$$|\Delta y| = |\sin(x + \Delta x) - \sin x| = \left| 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \right| \leq 2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right|. \quad (2.15)$$

Далее, для любого α справедливо неравенство

$$|\sin \alpha| \leq |\alpha|. \quad (2.16)$$

Если $0 \leq \alpha < \pi/2$, то неравенство (2.16) следует из неравенства (2.5), полученного при доказательстве теоремы 2.23. Так как $|\sin \alpha| \leq 1$ для любого аргумента, то для $\alpha \geq \pi/2 > 1$ неравенство (2.16) также верно. Если $\alpha < 0$, то $-\alpha > 0$ и в силу нечетности функции синус получим:

$$|\sin \alpha| = |\sin(-\alpha)| \leq |-\alpha| = |\alpha|.$$

Применяя (2.16) к правой части (2.15), выводим неравенство: $|\Delta y| \leq 2 \left| \frac{\Delta x}{2} \right| = |\Delta x|$. Отсюда $\Delta y \rightarrow 0$, если $\Delta x \rightarrow 0$, и непрерывность функции синус обоснована.

Записывая функцию $\cos x$ как сложную ($\cos x = \sin u$, $u = \frac{\pi}{2} - x$), из непрерывности синуса и теоремы 2.29 заключаем, что функция косинус непрерывна. Функции $\operatorname{tg} x$ ($x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$) и $\operatorname{ctg} x$ ($x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$) будут непрерывны для указанных x как частные двух непрерывных функций со знаменателями, не равными нулю.

Непрерывными на всей области определения будут и другие основные элементарные функции: $y = x^a$, $y = a^x$, $y = \log_a x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Элементарная функция получается из основных элементарных функций с помощью применения конечного числа арифметических действий и суперпозиций. Поэтому из непрерывности основных элементарных функций и теорем 2.27 и 2.29 следует, что *всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена*.

4. Точки разрыва функции и их классификация

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются *точками разрыва* функции. Функция $f(x)$ непрерывна в точке a , если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Таким образом, в точке разрыва должно нарушаться это равенство. Рассмотрим подробнее все возможные случаи его нарушения.

1-й случай (*устраняемая точка разрыва*). Пусть существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Тогда точка a будет точкой разрыва, если функция не определена в самой точке (рис.2.12,*а*), либо определена в точке, но $f(a) \neq \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ (рис.2.12,*б*). Такая точка разрыва называется *устраняемой точкой разрыва*. Разрыв устраняется, если функцию *доопределить* (рис.2.12,*а*) или *переопределить* (рис.2.12,*б*) в точке a , положив $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Например, функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ имеет устранимый разрыв в точке 0 , так как не определена в нуле, но существует $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Поэтому, если доопределить функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ в нуле равенством $f(0) = 1$ (говорят *доопределим в точке разрыва по непрерывности*), то получим функцию, непрерывную на всей числовой прямой.

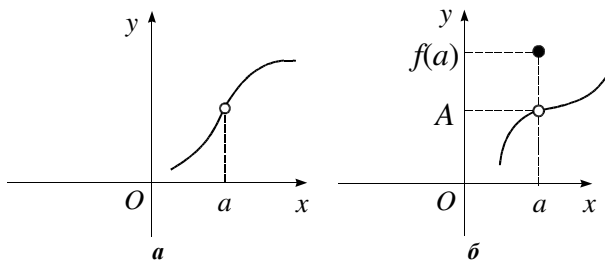


Рис.2.12.

2-й случай (*точка разрыва 1-го рода*). Точка a называется *точкой разрыва 1-го рода*, если не существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, но существуют односторонние пределы $f(a+0) \neq f(a-0)$. В точке разрыва 1-го рода функция делает как бы скачок от значения $f(a-0)$ к значению $f(a+0)$ (рис.2.13,*а*). Разрыв 1-го рода в нуле имеет функция $\operatorname{sign} x$ (см. рис.2.7). Изменяя или доопределяя значение функции в точке разрыва 1-го рода, разрыв устранить нельзя, но можно добиться непрерывности функции в точке либо справа, либо слева.

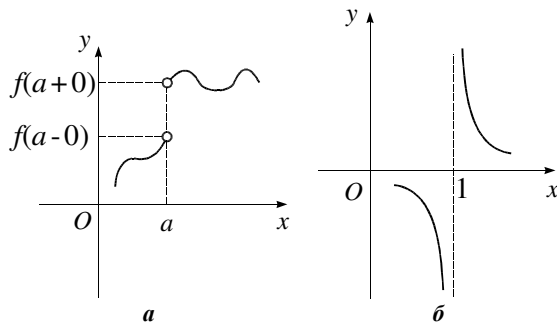


Рис.2.13.

3-й случай (*точка разрыва 2-го рода*). Точка a называется *точкой разрыва 2-го рода*, если хотя бы один из односторонних пределов в точке a не существует или равен бесконечности. Разрыв 2-го рода в точке $a=1$ имеет функция $f(x) = \frac{1}{x-1}$ (рис.2.13,б): $f(1-0) = -\infty$, $f(1+0) = +\infty$. Для функции $\sin \frac{1}{x}$ точка $a=0$ есть точка разрыва 2-го рода: односторонние пределы в нуле не существуют (см. пример 2.15).

2.11. Свойства непрерывных на отрезке функций

Свойства функции зависят как от характера зависимости, так и от множества, на котором зависимость рассматривается. Например, функция $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ограничена на отрезке $[2; 3]$ и не ограничена на интервале $(1; 2)$. Оказывается, что любая функция, непрерывная на отрезке, обладает рядом замечательных свойств. Сформулируем их.

Теорема 2.30. Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на нём.

Определение. Число $M(m)$ называется *наибольшим (наименьшим) значением* функции $f(x)$ на множестве I , если существует точка $c \in I$ такая, что $f(c) = M$ ($f(c) = m$) и $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq m$) для любого $x \in I$.

Обозначения: $M = \max_{x \in I} f(x)$, $m = \min_{x \in I} f(x)$.

Теорема 2.31 (Вейерштрасс). Если функция непрерывна на отрезке, то она имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения.

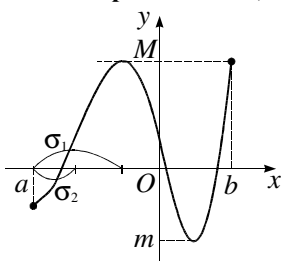


Рис.2.14.

Геометрически теоремы 2.30 и 2.31 очевидны. Действительно, пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Если на декартовой плоскости отметить точки $A = (a, f(a))$ и $B = (b, f(b))$ и соединить их непрерывной кривой, не отрывая карандаш от плоскости, то кривая не может «уйти» сколь

угодно высоко вверх (аналогично, вниз), и поэтому будет иметь одну или несколько самых «высоких» точек (соответственно, самых «низких») (рис.2.14).

Замечание. Это рассуждение не может считаться доказательством, так как существуют непрерывные функции, графики которых невозможно нарисовать (см. подразд. 3.1).

Теорема 2.32. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и на концах его принимает значения разных знаков, то существует хотя бы одна точка $\gamma \in (a; b)$ такая, что $f(\gamma) = 0$.

◀Пусть, например, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Разделим отрезок $[a; b]$ пополам (см. рис.2.14). Если в точке деления функция равна нулю, то теорема доказана; если этого нет, то на одной из половинок, которую обозначим $\sigma_1 = [a_1; b_1]$, отрезка $[a; b]$ функция будет иметь значения разных знаков, причём $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$. Разделим $[a_1; b_1]$ также пополам. Если в середине отрезка $[a_1; b_1]$ функция равна нулю, то теорема доказана. Если не равна нулю, то выберем ту его половину $\sigma_2 = [a_2; b_2]$, на концах которой функция имеет значения разных знаков: $f(a_2) < 0$, $f(b_2) > 0$. Если продолжать этот процесс, то либо на каком-то шаге попадём на точку $\gamma \in (a; b)$, в которой функция равна нулю, либо получим бесконечную последовательность вложенных друг

в друга отрезков $[a_n; b_n]$ таких, что их длины стремятся к нулю и $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$.

Последовательность чисел a_n не убывает и ограничена сверху, например, числом b . По теореме 2.11 тогда существует $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, который обозначим γ . Число γ принадлежит отрезку $[a; b]$, так как $a \leq a_n \leq b$ и при переходе к пределу нестрогие неравенства сохраняются (теорема 2.2). В точке γ функция будет равна нулю. Действительно, если предположить, например, что $f(\gamma) > 0$, то по свойству непрерывных функций (теорема 2.26) найдётся окрестность $U(\gamma)$ такая, что $f(x) > 0$ для всех $x \in U(\gamma)$. Но это противоречит тому, что $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$, а для достаточно больших n отрезки $[a_n; b_n] \subset U(\gamma)$, поскольку их длины стремятся к нулю. ►

Теорема 2.32 обосновывает известный со школы метод интервалов решения неравенств $f(x) \geq 0$ (или > 0): если функция определена на интервале и непрерывна на нём, то между двумя соседними нулями функции, принадлежащими интервалу, она сохраняет знак. Знак на каждом таком промежутке можно определить, вычислив значение функции лишь в одной точке промежутка.

Теорема 2.33. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то на этом отрезке она принимает все промежуточные значения между минимумом и максимумом.

◄ По теореме 2.31 существуют точки $\alpha \in [a; b]$ и $\beta \in [a; b]$ такие, что $f(\alpha) = m = \min_{x \in [a; b]} f(x)$ и $f(\beta) = M = \max_{x \in [a; b]} f(x)$. Пусть $m < M$ (если $m = M$, то функция постоянная и утверждение теоремы очевидно) и, для определённости, $\alpha < \beta$. Возьмём произвольное число $m < C < M$. Тогда функция $F(x) = f(x) - C$ непрерывна на отрезке $[\alpha; \beta]$ и имеет на его концах значения разных знаков. Значит, существует

вует точка $c \in (\alpha; \beta) \subset (a; b)$ такая, что $F(c) = f(c) - C = 0$, т.е. $f(c) = C$. ►

Из теоремы 2.33 следует, например, что *существует* положительное число, квадрат которого равен 2. Действительно, рассмотрим функцию $f(x) = x^2$ на отрезке $[0; 2]$. Она непрерывна на этом отрезке, и поэтому принимает на нём все значения между минимумом, равным числу $0 = f(0)$, и максимумом, равным числу $4 = f(2)$. В частности, существует на интервале $(0; 2)$ такое число, которое *обозначается* $\sqrt{2}$, что $f(\sqrt{2}) = 2$.

Приведенное рассуждение является, по сути, доказательством *теоремы существования однозначной обратной функции*: *если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке $[a; b]$, то на отрезке $[f(a); f(b)]$ (на $[f(b); f(a)]$) определена однозначная обратная функция $x = f^{-1}(y)$* . Можно доказать, что обратная функция будет также возрастающей (убывающей) и непрерывной.

2.12. Равномерная непрерывность

По определению, данному выше, функция $f(x)$ непрерывна на промежутке, если для каждой точки x_0 промежутка для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ для всех x , принадлежащих промежутку и удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$. При этом подчёркивалось, что δ зависит от ε . Но, в действительности, при заданном ε число δ зависит в общем случае и от положения точки на промежутке. Например, как видно из рис.2.15, при *одном и том же* ε число δ , пригодное для пологого участка графика, может оказаться непригодным для круто поднимающегося вверх участка.

В связи с этим, естественно, возникает вопрос: в каких случаях можно найти $\delta > 0$, зависящее *только от* ε , пригодное для всех точек

x_0 из промежутка. Для функции с графиком из рис.2.15 для отрезка $[a; b]$ такое δ по заданному ϵ можно найти. Ясно, что для всего промежутка $[a; b]$ пригодно δ , выбранное для $x_0 = b$. Также ясно, что для промежутка $[a; c)$ не существует такого $\delta > 0$: при приближении точки x_0 к c число δ должно становиться всё меньше и меньше. В первом случае говорят, что функция равномерно непрерывна на $[a; b]$, во втором – не является равномерно непрерывной на $[a; c)$.

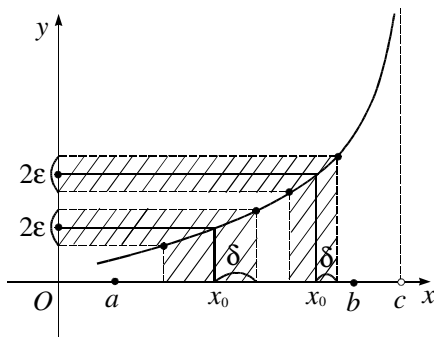


Рис.2.15.

Определение. Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной на множестве T* , если для любого $\epsilon > 0$ найдётся число $\delta > 0$, зависящее только от ϵ , такое, что $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ для любых $x', x'' \in T$, удовлетворяющих неравенству $|x' - x''| < \delta$.

Равномерная непрерывность функции на каком-то промежутке означает, что значения функции будут близки, если будут близки аргументы, *независимо* от их места нахождения на промежутке. Выполнение этого свойства важно для различных измерительных приборов: указанная в паспорте прибора погрешность измерения должна гарантироваться независимо от значения измеряемой величины, если она находится в диапазоне, для измерений в котором предназначено устройство.

Если одну из точек x', x'' , например x' , зафиксировать, то получим определение непрерывности функции в точке x' . Следовательно, равномерно непрерывная на промежутке функция является непрерывной в каждой точке промежутка.

Обратное утверждение в общем случае неверно. Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$, имеющая вертикальную асимптоту $x=0$, непрерывна на интервале $(0; 1)$, но не является равномерно непрерывной на нём. При приближении к нулю разность аргументов x', x'' должна быть всё меньше, чтобы модуль разности $\left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} \right|$ не превосходил заданную величину ε .

Однако, если функция непрерывна на отрезке, то описанной выше ситуации быть не может, как вытекает из следующей замечательной теоремы.

Теорема 2.34 (Кантор^{*}). Если функция непрерывна на отрезке, то она равномерно непрерывна на нём.

^{*} Кантор Георг (1845–1918) – немецкий математик.

3. Производные и дифференциалы

3.1. Понятие производной

При изучении переменных процессов в физике, химии, технике, экономике и т.д. обычно возникает вопрос о скорости изменения процесса. Математическим понятием, характеризующим скорость изменения переменной величины, является производная. Поэтому оно является одним из важнейших в математическом анализе. Само возникновение понятия производной связывают с решением двух задач: 1) вычисление мгновенной скорости движущегося тела; 2) построение касательной к кривой.

1. Задача о вычислении скорости

Пусть некоторое тело движется прямолинейно и известна зависимость величины пути s , пройденного с начала движения, от времени движения t . Например, пусть $s = t^2$. Требуется определить скорость движения тела в момент t_0 .

Естественное решение этой задачи следующее. Вычислим путь, пройденный телом с момента t_0 до момента $t_0 + \Delta t$, считая $\Delta t > 0$:

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = (t_0 + \Delta t)^2 - t_0^2 = 2t_0\Delta t + (\Delta t)^2.$$

Разделив Δs на Δt , найдём среднюю скорость тела на промежутке времени $[t_0; t_0 + \Delta t]$: $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 2t_0 + \Delta t$. Средняя скорость меняется с

изменением Δt . Очевидно, чем меньше Δt , тем меньше средняя скорость отличается от величины, которую мы интуитивно считаем скоростью тела в момент t_0 . Поэтому *скоростью* v тела в момент t_0 назовём предел отношения приращения пути Δs к приращению времени Δt , когда Δt стремится к нулю. Для рассматриваемого примера получим $v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2t_0 + \Delta t) = 2t_0$.

Аналогичное рассуждение применимо и в общем случае прямолинейного движения, если известна зависимость $s(t)$ пути от времени движения. Сначала находим среднюю скорость на промежутке $[t; t + \Delta t]$ как отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. А затем, переходя к пределу, вычисляем скорость в момент t :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (3.1)$$

2. Задача о построении касательной к кривой

Другой важной задачей, приводящей к вычислению предела отношения, аналогичного отношению $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, является задача о проведении касательной к кривой. Но, в отличие от задачи вычисления мгновенной скорости, здесь сначала уточним, что понимать под касательной к кривой.

В школьном курсе геометрии касательной к окружности называлась прямая, имеющая с окружностью лишь одну общую точку. Однако это определение непригодно для общего случая. Например, для параболы $y = x^2$ любая прямая, параллельная оси Oy , будет иметь с параболой лишь одну общую точку, но ни одна из них не соответствует нашему интуитивному представлению о касательной к параболе.

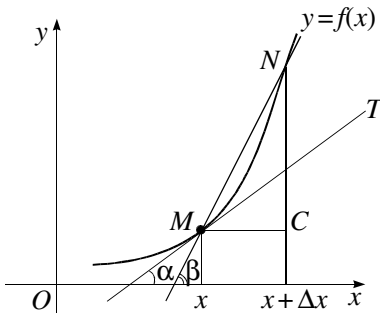


Рис.3.1.

Пусть кривая является графиком функции $y = f(x)$ и $M = (x, f(x))$ – произвольная точка, лежащая на кривой. Дадим определение касательной к кривой в точке M . Возьмём на графике ещё одну точку N с абсциссой $x + \Delta x$, $\Delta x \neq 0$ (рис.3.1). Проведём через них прямую, которую назовём *секущей*. Если Δx изменять, то точка N будет перемещаться по кривой, а секущая MN – вращаться вокруг точки M .

Определение. Касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M называется прямая MT , к которой стремится секущая MN , когда точка N стремится вдоль графика к точке M .

Коротко говорят: касательная – предельное положение секущей.

Так как касательная проходит через заданную точку M , то для определения положения касательной достаточно найти её угловой коэффициент, т.е. найти $\operatorname{tg} \alpha$, где α – угол между касательной и положительным направлением оси абсцисс.

Пусть β – угол между секущей MN и положительным направлением оси абсцисс. Угол β , вообще говоря, меняется при изменении точки N . Секущая будет иметь предельное положение тогда и только тогда, когда β стремится к определенному числу при $\Delta x \rightarrow 0$. Рассмотрим треугольник MNC (см. рис.3.1). Имеем $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \angle NMC$. Так

как $CN = \Delta f$ и $MC = \Delta x$, то $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$. Следовательно, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta$ будет

существовать тогда и только тогда, когда существует $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$. Если

этот предел существует, то

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}. \quad (3.2)$$

3. Определение производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a . Дадим аргументу приращение Δx , которое может быть как положительным, так и отрицательным. Тогда функция получит приращение $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$. Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ называют *разностным* отношением.

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке a называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Операцию нахождения производной функции называют *дифференцированием*. Для обозначения производной применяют символы:

$\frac{dy}{dx}$, y' , f' и $\frac{dy(a)}{dx}$, $y'(a)$, $f'(a)$, если желают указать точку, в которой вычисляется производная. Итак,

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}. \quad (3.3)$$

Отметим, что разностное отношение теряет смысл при $\Delta x = 0$. Но, как подчеркивалось в подразд. 2.7 при обсуждении понятия предела функции в точке, поведение функции в самой точке не влияет на существование предела и его значение.

4. Физический и геометрический смыслы производной

Сопоставляя определение производной с формулой (3.1) для вычисления скорости тела, заключаем, что $v(t) = s'(t)$, т.е. *производная пути $s(t)$ есть скорость (мгновенная) движения тела*.

Аналогичная интерпретация производной верна при рассмотрении и других процессов. Например, пусть известна зависимость $W(\theta)$ количества теплоты, которую нужно сообщить телу, чтобы нагреть его от 0 до θ° . *Средняя теплоёмкость* при нагревании от θ до $(\theta + \Delta\theta)^\circ$

равна $\frac{\Delta W}{\Delta \theta} = \frac{W(\theta + \Delta\theta) - W(\theta)}{\Delta \theta}$. *Теплоёмкостью $c(\theta)$* при данной тем-

пературе θ° естественно называть $\lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta \theta}$, т.е. $c(\theta) = W'(\theta)$.

Из формул (3.2) и (3.3) получаем геометрическую интерпретацию производной: *производная есть угловой коэффициент касательной*.

Запишем уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой a . Заметим, что часто говорят короче: запишем уравнение касательной в точке $x = a$, имея в виду, что координата точки на графике вычисляется через значение a .

Из аналитической геометрии известно, что уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) под углом α к положительному направлению оси абсцисс, имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$, где $k = \operatorname{tg} \alpha$. По формуле (3.2), $k = f'(a)$. Следовательно, уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой a имеет вид

$$y - f(a) = f'(a)(x - a). \quad (3.4)$$

Прямая, проходящая через точку M кривой, перпендикулярно касательной к кривой в этой точке, называется *нормалью к кривой в точке M* . Так как угловые коэффициенты k_1 и k_2 двух взаимно перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_1 k_2 = -1$, то из уравнения (3.4) следует уравнение нормали к графику функции в точке с абсциссой a :

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a).$$

5. Необходимое условие существования производной

Теорема 3.1. Если функция имеет производную в точке, то она непрерывна в этой точке.

◀ Пусть функция $f(x)$ имеет производную в точке a . Тогда из равенства $f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ и теоремы 2.20 следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) + \alpha(\Delta x), \text{ а значит}$$

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \quad (3.5)$$

где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \rightarrow 0$. Так как правая часть последнего равенства стремится к нулю при $\Delta x \rightarrow 0$, то и $\Delta y \rightarrow 0$, когда $\Delta x \rightarrow 0$. ▶

Вместе с тем, если функция непрерывна в точке, то она не обязательно имеет производную в этой точке. Например, функция $y = |x|$ непрерывна в точке 0, но не имеет производной (не имеет касательной) в точке 0 (рис.3.2). Но данная функция в точке 0 имеет не равные *односторонние производные*:

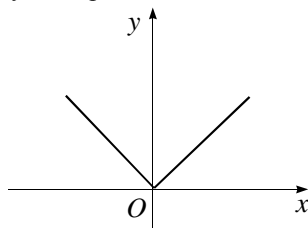


Рис.3.2.

$$y'_n(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$$y'_x(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Используя функцию $y = |x|$, легко построить непрерывную функцию, не имеющую производной в нескольких точках. Например, непрерывная функция $y = |x| + |x - 2|$ не имеет производной в двух точках: 0 и 2. Более того, существуют функции, непрерывные на всей числовой оси и не имеющие производной ни в одной точке. График такой функции нельзя нарисовать! В частности, примером непрерывной, но нигде не имеющей производной функции является функция Вейерштрасса

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x), \quad ab \geq 1 \text{ и } a > 1.$$

3.2. Вычисление производных

1. Производные функций $y = C$, $y = x$, $y = \sin x$, $y = a^x$, $y = \log_a x$

Для постоянной функции имеем $\Delta y = C - C = 0$, и поэтому

$$C' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Для функции $y = x$ приращение $\Delta y = \Delta x$. Значит, $x' = 1$.

Сложнее вычислить производную функции $y = \sin x$. Приращение

$$\text{функции } \Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Отсюда, используя первый замечательный предел и непрерывность функции косинус, получаем:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x / 2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x.$$

Аналогично, используя следствия из второго замечательного предела, выводим:

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a;$$

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a (x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\Delta x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

В частности, $(e^x)' = e^x$ и $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

2. Правила дифференцирования

Как видим, вычисление производных по определению производной является непростой задачей даже для основных элементарных функций. Тем более труднее вычислить по определению производную функции, которая является комбинацией нескольких основных элементарных функций. В связи с этим докажем ряд правил дифференцирования, которые позволят достаточно легко вычислять производные сложных выражений на основе вычисленных по определению производных лишь нескольких функций.

Теорема 3.2 (дифференцирование суммы, разности, произведения, частного функций). Если функции f и g имеют производные в точке, то их сумма, разность, произведение и частное ($g \neq 0$ в точке) также имеют производные в этой точке:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'; \quad (fg)' = f'g + fg'; \quad \left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

◀Найдём приращение для суммы (разности) функций

$$\begin{aligned} \Delta(f \pm g) &= [f(x + \Delta x) \pm g(x + \Delta x)] - [f(x) \pm g(x)] = \\ &= [f(x + \Delta x) - f(x)] \pm [g(x + \Delta x) - g(x)] = \Delta f \pm \Delta g. \end{aligned}$$

Отсюда

$$(f \pm g)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f \pm \Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f' \pm g'.$$

Для доказательства правил дифференцирования произведения и частного сначала отметим, что $u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta u$ для любой функции u . Используя это равенство, запишем приращение произведения функций f и g в виде:

$$\begin{aligned} \Delta(fg) &= f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) = \\ &= (f(x) + \Delta f)(g(x) + \Delta g) - f(x)g(x) = g(x)\Delta f + f(x)\Delta g + \Delta f\Delta g. \end{aligned}$$

Так как функции, имеющие производную, непрерывны (см. теорему 3.1), то $\Delta g, \Delta f \rightarrow 0$, если $\Delta x \rightarrow 0$. Значит,

$$\begin{aligned} (f(x)g(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(fg)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x)\Delta f + f(x)\Delta g + \Delta f\Delta g}{\Delta x} = \\ &= g(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \end{aligned}$$

Аналогично, для случая частного функций:

$$\Delta\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) + \Delta f}{g(x) + \Delta g} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\Delta f g(x) - f(x)\Delta g}{(g(x) + \Delta g)g(x)}$$

и

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{g(x)\Delta f - f(x)\Delta g}{(g(x) + \Delta g)g(x)} \right) \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(g(x) + \Delta g)g(x)} \times \\ &\times \left(g(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} - f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Теорема 3.3 (дифференцирование сложной функции). Пусть функция $x = \varphi(t)$ имеет производную в точке t , а функция $y = f(x)$ – в соответствующей точке x , т.е. $x = \varphi(t)$. Тогда сложная функция $y = F(t) = f(\varphi(t))$ имеет производную в точке t и справедливо равенство

$$F'(t) = f'(x)\varphi'(t) \text{ или, коротко, } y'_t = y'_x x'_t,$$

где справа вместо x должно быть подставлено выражение $x = \varphi(t)$.

◀Придадим переменной t приращение $\Delta t \neq 0$. Тогда переменная x получит приращение $\Delta x = \Delta \varphi = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$, которое не обязательно отлично от нуля. Запишем приращение для функции $F(t)$:

$$\begin{aligned}\Delta F &= F(t + \Delta t) - F(t) = f(\varphi(t + \Delta t)) - f(\varphi(t)) = \\ &= f(\varphi(t) + \Delta \varphi) - f(\varphi(t)) = f(x + \Delta \varphi) - f(x).\end{aligned}\quad (3.6)$$

Из определения производной следует (см. равенство (3.5)), что для любого приращения $\Delta \varphi$ аргумента x

$$f(x + \Delta \varphi) - f(x) = f'(x)\Delta \varphi + \alpha(\Delta \varphi)\Delta \varphi,$$

где $\alpha(\Delta \varphi) \rightarrow 0$ при $\Delta \varphi \rightarrow 0$ и считается, что $\alpha(0) = 0$. Применив его к правой части (3.6) и перейдя к пределу, найдём:

$$\begin{aligned}F'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f'(x)\Delta \varphi + \alpha(\Delta \varphi)\Delta \varphi}{\Delta t} = \\ &= f'(x) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha(\Delta \varphi) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = f'(x)\varphi'(t).\end{aligned}$$

При выводе было учтено также, что $\Delta \varphi \rightarrow 0$, если $\Delta t \rightarrow 0$. Поэтому $\alpha(\Delta \varphi) \rightarrow 0$, когда $\Delta t \rightarrow 0$. ▶

Теорема 3.4 (дифференцирование обратной функции). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на некотором промежутке и имеет в точке x производную, не равную нулю. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y) = g(y)$ имеет производную в точке $y = f(x)$ и справедливо равенство

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.\quad (3.7)$$

Справедливость равенства (3.7) нетрудно понять из рис.3.3. Кривая, являющаяся графиком прямой функции, является графиком и обратной функции. Если функция $y = f(x)$ имеет касательную в точке x , то эта же прямая будет касательной и к графику обратной функции $x = g(y)$ в точке $y = f(x)$. Для функции $y = f(x)$ производная $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$, где α – угол наклона касательной.

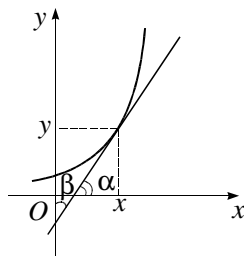


Рис.3.3.

тельной к положительному направлению оси Ox . Для обратной функции $g'(y) = \operatorname{tg} \beta$, где β – угол наклона той же касательной, но к положительному направлению оси Oy . Из рисунка следует, что углы α и β связаны соотношением $\alpha + \beta = \pi/2$ (для убывающей функции $\alpha + \beta = -\pi/2$). Значит,

$$g'(y) = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{f'(x)}.$$

3. Производные функций $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, обратных тригонометрических функций

Функцию косинус можно записать как сложную: $\cos x = \sin u$, где $u = \frac{\pi}{2} - x$. Находим $(\sin u)' = \cos u$, $\left(\frac{\pi}{2} - x \right)' = -1$. Следовательно, по правилу дифференцирования сложной функции, $(\cos x)' = -\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = -\sin x$.

Производную тангенса найдём по правилу дифференцирования частного:

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Аналогично $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Вычислим производную функции $y = \arcsin x$. Данная функция является обратной к функции $x = \sin y$, $y \in [-\pi/2; \pi/2]$. По правилу дифференцирования обратной функции

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

если $\cos y \neq 0$, т.е. $x \neq \pm 1$. Таким же способом доказываются формулы

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

4. Производная функции $y = x^\alpha$. Производная степенно-показательных функций

Зная, что $(x)' = 1$, и, применяя правило дифференцирования произведения, легко получаем:

$$(x^2)' = (x \cdot x)' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x.$$

По индукции найдём

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad (3.8)$$

если α – натуральное число. Далее, если α – целое отрицательное число, то число $-\alpha$ будет натуральным, а значит

$$(x^\alpha)' = \left(\frac{1}{x^{-\alpha}} \right)' = \frac{1' x^{-\alpha} - (-\alpha) x^{-\alpha-1}}{x^{-2\alpha}} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

В случае, когда α – произвольное действительное число, формулу (3.8) можно доказать следующим образом. Если $x > 0$, то в силу основного логарифмического тождества $x = e^{\ln x}$. Следовательно, $(x^\alpha)' =$

$$= (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} (\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Формулу (3.8) можно также доказать способом *логарифмического дифференцирования*. Логарифмируя равенство $y = x^\alpha$, имеем $\ln y = \alpha \ln x$. Дифференцируем обе части последнего равенства по переменной x , считая переменную y функцией от x : $\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x}$ или

$$y' = y \frac{\alpha}{x}. \text{ Подставляя сюда } y = x^\alpha, \text{ получим формулу (3.8).}$$

Способ логарифмического дифференцирования применяется для вычисления производных степенно-показательных функций $y = u(x)^{v(x)}$.

Пример 3.1. Вычислить производную функции $y = x^x$.

◀ Логарифмируя, имеем $\ln y = x \ln x$. Дифференцируем это равенство: $\frac{y'}{y} = \ln x + 1$. Отсюда $y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$. ▶

Замечание. Выражение $\frac{y'}{y} = (\ln y)'$, т.е. производную от натурального логарифма переменной $y = y(x)$, называют *логарифмической производной*.

5. Гиперболические функции и их производные

Функции

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

называются соответственно *гиперболическим синусом*, *гиперболическим косинусом*, *гиперболическим тангенсом*, *гиперболическим котангенсом*.

На рис.3.4,а и б изображены графики этих функций. Нетрудно заметить, что гиперболический синус – функция нечётная, а гиперболический косинус – чётная. Нечётными являются функции гиперболический тангенс и гиперболический котангенс.

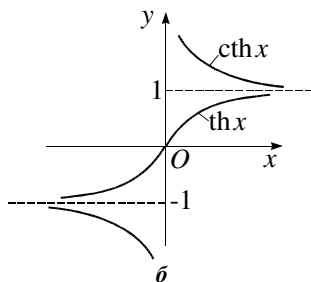
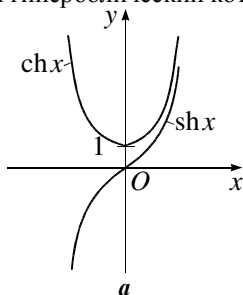


Рис.3.4.

Для гиперболических функций справедливы формулы, «похожие» на формулы тригонометрии. Например,

$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y. \quad (3.9)$$

Действительно, выполняя очевидные преобразования, находим:

$$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{-x+y} + e^{x-y}}{4}$$

и, аналогично,

$$\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{4} - \frac{e^{-x+y} + e^{x-y}}{4}.$$

Складывая данные равенства, получаем:

$$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = \operatorname{ch}(x+y).$$

Полагая в (3.9) $y = -x$ и учитывая, что $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$, $\operatorname{ch} 0 = 1$, выводим тождество:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1. \quad (3.10)$$

Полагая в (3.9) $y = x$, получим формулу двойного аргумента для гиперболического косинуса: $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$.

Равенство (3.10) объясняет название гиперболические функции. Если положить $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$, то при любом t точка с координатами (x, y) удовлетворяет уравнению равнобочной гиперболы $x^2 - y^2 = 1$.

Нетрудно вычислить производные гиперболических функций

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

6. Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в каждой точке некоторого промежутка. Тогда сама производная является функцией от переменной x на этом промежутке. Если она имеет производную в какой-то точке x_0 промежутка, то её называют *производной второго*

порядка или второй производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначают одним из символов: y'' , f'' , $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

Производную y' называют также производной *первого порядка* или *первой производной*.

Механический смысл второй производной – ускорение, т.е. скорость изменения скорости движения точки.

По индукции определяется *производная n -го порядка* или *n -я производная* функции: *производной n -го порядка* или *n -й производной* функции $y = f(x)$ называется первая производная от производной $(n-1)$ -го порядка. Для обозначения n -й производной употребляют

символы: $y^{(n)}$, $f^{(n)}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Для обозначения третьей производной также применяют символы: y''' , f''' .

Пример 3.2. Вычислить вторую производную функции $y = x \cos x$.

◀Последовательно находим: $y' = \cos x - x \sin x$, $y'' = (y')' = (\cos x - x \sin x)' = -\sin x - \sin x - x \cos x = -2 \sin x - x \cos x$. ▶

3.3. Дифференциал

1. Понятие дифференцируемости функции

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке x* , если её приращение Δy в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta y = A \Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0, \quad (3.11)$$

где A не зависит от Δx , но зависит в общем случае от x .

Теорема 3.5 (необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции). Для того чтобы функция была дифференцируема в точке, необходимо и достаточно, чтобы она имела производную в этой точке.

◀**Необходимость.** Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x , т.е. её приращение в этой точке можно записать в виде (3.11). Разделив обе части равенства (3.11) на $\Delta x \neq 0$, получим:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}, \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

По определению o -малого: $\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Поэтому, переходя к пределу, заключаем, что производная функции $y = f(x)$ в точке x существует, причём

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} A + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A. \quad (3.12)$$

Достаточность. Пусть функция имеет производную в точке x :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad \text{Тогда, согласно теореме 2.20, } \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \rightarrow 0$. Отсюда

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x = f'(x)\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0. \quad (3.13)$$

Таким образом, для приращения функции справедливо представление (3.11), причём $A = f'(x)$. ▶

В силу доказанной теоремы далее вместо выражения «функция имеет производную в точке (на промежутке)» будем говорить: «функция дифференцируема в точке (на промежутке)». При этом, в случае отрезка, на концах отрезка рассматриваются, естественно, односторонние производные.

2. Понятие дифференциала функции

Для дифференцируемой в точке функции её приращение в этой точке равно сумме двух слагаемых (см. формулу (3.11)): первое линейно, более того, прямо пропорционально зависит от приращения аргумента Δx , а второе, если $A \neq 0$, есть бесконечно малая величина более высокого порядка малости, чем первое. Поэтому слагаемое $A\Delta x$ является *главной линейной частью* приращения дифференцируемой функции.

Определение. Если функция дифференцируема в точке x , то главную линейную относительно Δx часть приращения функции называют *дифференциалом* функции в этой точке.

Обозначается дифференциал символом dy . Итак, по определению, $dy = A\Delta x$.

Выше (см. теорему 3.4) было доказано, что функция дифференцируема в точке тогда и только тогда, когда она имеет производную в этой точке. При этом в ходе доказательства теоремы (см. равенства (3.12), (3.13)) было получено важное соотношение: $A = f'(x)$. Следовательно, дифференциал функции находится по формуле:

$$dy = f'(x)\Delta x. \quad (3.14)$$

По формуле (3.14) для дифференциала функции $y = x$ имеем $dy = dx = \Delta x$. Поэтому дифференциал функции обычно записывают так:

$$dy = f'(x)dx. \quad (3.15)$$

Из формулы (3.15) вытекает, что *вычисление дифференциала фактически равносильно вычислению производной: найденную производную функции нужно лишь умножить на dx .*

Так как правая часть формулы (3.15) есть произведение, то $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, т.е. производная равна отношению дифференциала зависимой переменной y к дифференциалу независимой переменной x .

Пример 3.3. Найти дифференциал функции $y = \sin x^2$.

◀Находим производную $y' = 2x \cos x^2$. Тогда $dy = 2x \cos x^2 dx$.▶

Применяя формулу (3.15) и правила вычисления производной суммы, разности, произведения и частного функций, получаем формулы для нахождения дифференциала суммы, разности, произведения и частного дифференцируемых функций:

$$d(u \pm v) = du \pm dv; \quad d(uv) = vdu + udv; \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

Докажем, например, формулу для произведения. Имеем $(uv)' = vu' + uv'$. Поэтому $d(uv) = (uv)'dx = vdu + udv$, так как $u'dx = du$ и $v'dx = dv$.

3. Геометрический смысл дифференциала функции

Геометрический смысл дифференциала следует из формулы (3.14) и геометрического смысла производной.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x и $f'(x) \neq 0$.

Рассмотрим её график и касательную MT к графику в точке $(x, f(x))$

(рис.3.5). Дадим аргументу приращение Δx . Значению аргумента $x + \Delta x$ соответствует на графике точка $C = (x + \Delta x, f(x + \Delta x))$. Касательная пересекает отрезок AC в точке B . Так как $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$, где α – угол наклона касательной MT к оси Ox , то из прямоугольного треугольника MBA находим:

$$AB = \Delta x \cdot \operatorname{tg} \alpha = f'(x) \Delta x = dy.$$

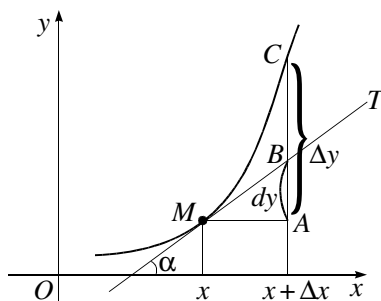


Рис.3.5.

Таким образом, с геометрической точки зрения дифференциал функции y в точке x равен приращению ординаты касательной, проведённой к графику функции в точке x .

Из рис.3.5 видно, что $BC = \Delta y - dy$. Длины отрезков AB и BC стремятся к нулю при $\Delta x \rightarrow 0$. Но, согласно определениям дифференцируемости и дифференциала функции: $BC = o(AB)$ при $\Delta x \rightarrow 0$, т.е. длина отрезка BC стремится к нулю по порядку быстрее длины отрезка AB при уменьшении приращения аргумента Δx . Это можно заметить и из рис.3.5.

С механической точки зрения дифференциал можно трактовать как путь, который будет проходить тело за время Δt , если с момента t оно будет двигаться с постоянной скоростью, достигнутой к моменту t .

4. Применение дифференциала для приближённых вычислений

Для дифференцируемой функции $y = f(x)$ приращение и дифференциал функции связаны равенством $\Delta y = dy + o(\Delta x)$, $\Delta x \rightarrow 0$. Отбрасывая в нём слагаемое $o(\Delta x)$, получаем приближённое равенство:

$$\Delta y \approx dy = f'(x)\Delta x. \quad (3.16)$$

Таким образом, при малых значениях приращения аргумента дифференциал может служить хорошим приближением приращения функции. Это очень важный вывод. Замена приращения функции дифференциалом используется при выводе дифференциальных уравнений, описывающих физические, химические и т.п. процессы, при выводе формул для вычисления геометрических и физических величин с помощью интегралов. При обработке результатов экспериментов за оценку абсолютной погрешности вычисления некоторой величины y , зависящей от измеряемой с погрешностью другой величины x , принимается дифференциал: $|\Delta y| \approx |dy|$, а за оценку относительной погрешности – соответ-

ственно отношение $\left| \frac{dy}{y} \right|$.

Заменяя слева в формуле (3.16) Δy на $f(x + \Delta x) - f(x)$, получаем формулу для приближённого вычисления значений функции:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Пример 3.4. Вычислить приближённо площадь квадрата со стороной 2 м, если его сторону увеличить на 10 см.

◀ Зависимость площади квадрата от стороны задаётся формулой $S(x) = x^2$. При $x = 2$ площадь равна 4. Производная $S'(x) = 2x$, и для

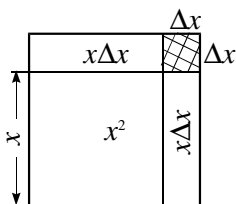


Рис.3.6.

$x = 2$, $\Delta x = 0,1$ дифференциал площади $dS = 4 \cdot 0,1 = 0,4$. Следовательно, площадь квадрата со стороной 2,1 м приближенно равна $S(2) + dS = 4,4$ м². Точное значение площади 4,41 м². Абсолютная ошибка равна 0,01 м², что можно считать малой величиной по сравнению с 4,4 м². На рис.3.6 наглядно показана погрешность вычисления площади квадрата с использованием

формулы (3.16): приращение площади квадрата и дифференциал отличаются на площадь заштрихованного малого квадрата. ►

5. Инвариантность формы дифференциала

Выше для дифференциала функции $y = f(x)$ в предположении, что x – *независимая* переменная, была получена формула (3.15): $dy = f'(x)dx$, т.е. дифференциал функции (переменной y) есть произведение производной функции по переменной x на дифференциал переменной x . Покажем, что эта формула справедлива и в случае, когда аргумент x сам является дифференцируемой функцией от некоторой другой переменной t .

В самом деле, пусть $y = f(x)$, а $x = \varphi(t)$. Рассмотрим сложную функцию $y = F(t) = f(\varphi(t))$, где t – независимая переменная. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции и формулы (3.15) для вычисления дифференциала в случае независимой переменной имеем

$$dy = F'(t)dt = f'(x)\varphi'(t)dt = f'(x)dx,$$

так как переменная t независима и, следовательно, $\varphi'(t)dt = dx$. Таким образом, дифференциал функции $y = f(x)$ может быть записан в форме (3.15) независимо от того, является аргумент x независимой переменной или нет. Это свойство называют *инвариантностью формы дифференциала*. Разница между случаями независимой и зависимой переменной x состоит в том, что в случае зависимой переменной нельзя заменять в записи дифференциала множитель dx на Δx .

Свойство инвариантности дифференциала позволяет всегда рассматривать производную $\frac{dy}{dx}$ как отношение дифференциалов dy и dx .

Пример 3.5. Пусть $y = x^2$. Если сначала вычислить дифференциал $dy = 2x dx$, а затем подставить $x = t^2$, то получим $dy = 2t^2 d(t^2) = 4t^3 dt$. Теперь сначала заменим x на t^2 в формуле $y = x^2$, задающей функцию, а затем вычислим дифференциал. Найдём:

$dy = d(t^4) = (t^4)' dt = 4t^3 dt$. Как видим, результат вычисления дифференциала по переменной t один и тот же независимо от порядка подстановки $x = t^2$.

6. Дифференциалы высших порядков

Дифференциал dy функции $y = f(x)$ называют также *первым дифференциалом*. Пусть функция дифференцируема в каждой точке некоторого промежутка. Тогда первый дифференциал $dy = f'(x)dx$ является функцией переменной x на этом промежутке. Дифференциал от первого дифференциала, рассматриваемого как функция от x , называется *вторым дифференциалом* функции, или *дифференциалом второго порядка*, и обозначается d^2y .

По индукции определяются дифференциал n -го порядка или n -й дифференциал функции $y = f(x)$: $d^n y = d(d^{n-1}y)$.

Найдём формулу для вычисления второго дифференциала функции $y = f(x)$, если x является *независимой* переменной. В этом случае dx является произвольным числом, не зависящим от x , а значит, $(dx)' = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} d^2y &= d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = \\ &= (f'(x))'dx dx = f''(x)dx^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Для упрощения записи в формуле (3.17) применено обозначение $dx^2 = (dx)^2$.

По индукции получаем формулу для вычисления дифференциала n -го порядка в случае, когда x – *независимая* переменная:

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n. \quad (3.18)$$

Из формулы (3.18) в случае независимой переменной x следует, что $f^{(n)}(x)$ можно рассматривать как отношение n -го дифференциала переменной y к n -й степени дифференциала первого порядка переменной x . Но *второй, третий и т.д. дифференциалы не обладают ин-*

вариантностью формы, т.е. в формуле (3.18) в общем случае нельзя заменять независимую переменную x на функцию $x = \varphi(t)$.

Пример 3.6. Пусть $y = x^2$. Её второй дифференциал равен $d^2y = 2dx^2$. Если сюда подставить $x = t^2$, то справа получим $2(dt^2)^2 = 8t^2 dt^2$. Теперь заменим x на t^2 в выражении $y = x^2$, а затем вычислим второй дифференциал: $d^2y = d^2(t^4) = (t^4)'' dt^2 = 12t^2 dt^2$. Данное выражение не совпадает с $8t^2 dt^2$.

3.4. Дифференцирование параметрически заданных и неявных функций

1. Параметрическое дифференцирование

Пусть задана система из двух уравнений

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \phi(t), \end{cases} \quad (3.19)$$

где t принимает значения из некоторого промежутка T . Возьмём произвольное значение $t \in T$. Ему соответствуют определённые числа x и y . При изменении t числа x и y в общем случае также будут взаимосвязано меняться. Поэтому можно сказать, что система (3.19) задаёт зависимость переменной y от переменной x . Но зависимость задана не непосредственно в виде формулы $y = f(x)$, а опосредовано через зависимость y и x от некоторой третьей вспомогательной переменной t , называемой *параметром*. Способ задания зависимости y от x в виде системы (3.19) называют *параметрическим*, а про функцию y говорят, что она задана *параметрически*.

Рассматривая значения $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$ как координаты точки на декартовой плоскости Oxy и изменяя t , получим некоторую кривую на плоскости. Систему уравнений (3.19) называют *параметрическими уравнениями кривой*. Например, уравнения $x = \cos t$, $y = \sin t$ будут

параметрическими уравнениями единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Уравнения $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ – параметрические уравнения эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Параметрические уравнения широко применяются в механике, так как удобно задавать отдельно зависимость каждой координаты движущейся точки от времени.

Если функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную $t = \varphi^{-1}(x)$, то можно написать явную зависимость y от x : $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$. Однако часто найти обратную функцию непросто, даже зная, что она существует. Поэтому важными являются способы, позволяющие устанавливать свойства явной зависимости y от x без получения этой явной зависимости.

Используя свойство инвариантности дифференциала, нетрудно доказать, что

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\phi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad (3.20)$$

если функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ дифференцируемы и $x'_t = \varphi'(t) \neq 0$ в точке t . Действительно, так как производная $\frac{dy}{dx}$ есть отношение дифференциалов dy и dx , то

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t dt}{x'_t dt} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Производная y'_x также является параметрически заданной функцией: $y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, $x = \varphi(t)$. Чтобы найти вторую производную y''_{xx} ,

нужно снова применить формулу (3.20): $y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_t / x'_t)'_t}{x'_t}$.

Пример 3.7. Вычислить y'_x и y''_{xx} , если $x = 2t + \sin 2t + 1$, $y = 2t - \sin 2t$.

◀По формуле (3.20) находим $y'_x = \frac{1 - \cos 2t}{1 + \cos 2t} = \operatorname{tg}^2 t$. Далее,

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(\operatorname{tg}^2 t)'_t}{x'_t} = \frac{2 \operatorname{tg} t}{2(1 + \cos 2t) \cos^2 t} = \frac{\sin t}{\cos^5 t}. \blacktriangleright$$

Пример 3.8. Найти уравнение касательной к кривой $x = 2t + \sin 2t + 1$, $y = 2t - \sin 2t$ в точке с абсциссой $x = 1$.

◀Если $t = 0$, то $x = 2t + \sin 2t + 1 = 1$. В силу неравенства $|\sin t| < |t|$, $t \neq 0$ (см. (2.16)) нет других значений параметра $t = 0$, при которых $x = 1$. Поэтому, из предыдущего примера, $y'_x = 0$ при $x = 1$. Ордината y при $t = 0$ равна 0. Следовательно, уравнение касательной $y = 0 + 0(x - 1)$, т.е. $y = 0$. ▶

2. Дифференцирование неявных функций

Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0. \quad (3.21)$$

Оно определяет зависимость переменной y от x . Эту зависимость y от x называют *неявной*, а функцию $y = f(x)$, определённую на некотором промежутке и такую, что уравнение (3.21) после подстановки $y = f(x)$ обращается в тождество на промежутке, называют *неявной функцией*. Уравнение (3.21) может задавать несколько однозначных неявных функций. Например, уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ определяет две однозначные функции: $y = \sqrt{1 - x^2}$ и $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

Вопрос о том, при каких условиях уравнение (3.21) можно разрешить относительно переменной y и какими свойствами обладает функция $y = f(x)$, является одним из сложных вопросов математического анализа. Здесь ограничимся следующим. Предполагая, что уравнение (3.21) задаёт неявную функцию $y = f(x)$ и эта функция дифференцируема, покажем на примере, как можно найти производную y'_x , не выражая явно y через x .

Пример 3.9. Вычислить y'_x , если $y^5 - y^4 - x^3 + y - x - 1 = 0$.

◀ Считая y неявной функцией от x , дифференцируем обе части тождества $y^5 - y^4 - x^3 + y - x - 1 \equiv 0$ по x : $5y^4 y'_x - 4y^3 y'_x - 3x^2 + y'_x - 1 \equiv 0$. Подчеркнём, что переменная y есть функция переменной x . Поэтому к выражениям y^5 , y^4 применено правило дифференцирования сложной функции. Теперь находим $y'_x = \frac{3x^2 + 1}{5y^4 - 4y^3 + 1}$. Для вычисления значения y'_x для заданного x нужно знать соответствующее значение y . Например, если взять $x = 0$, то нетрудно найти из уравнения, что $y = 1$. Поэтому, даже не зная явного вида зависимости y от x , мы можем утверждать, что $y'_x = 1/2$ в точке $x = 0$. ►

4. Основные теоремы о дифференцируемых функциях

4.1. Теоремы о среднем

Теоремами о среднем называют ряд утверждений о дифференцируемых функциях, в которых устанавливается связь между значениями функции на концах промежутка со значением производной в некоторой средней точке.

1. Теорема Ферма*

Пусть функция $f(x)$ задана на некотором промежутке и точка x_0 лежит *внутри* промежутка.

Определение. Точка x_0 называется *точкой локального максимума (минимума)* функции $f(x)$, если существует окрестность этой точки $U(x_0)$ такая, что для всех $x \in U(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$ (соответственно $f(x) \geq f(x_0)$).

Другими словами, в некоторой окрестности точки локального экстремума разность $f(x) - f(x_0)$ не должна менять знак.

Значение функции в точке локального максимума (минимума) называется *локальным максимумом (минимумом)*. Точки локального максимума или минимума называются *точками локального экстремума*, а значения функции в них – *локальными экстремумами*.

Подчеркнём, что в точке локального экстремума функция должна быть определена слева и справа от точки. Поэтому для функции, график которой изображён на рис.4.1, точки a и b не являются точками локального экстремума, хотя в них функция принимает наименьшее и, соответственно, наибольшее значения на $[a; b]$.

* Ферма́ Пьер (1601–1665) – французский математик.

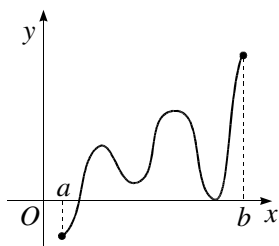


Рис.4.1.

Говоря о точках локального экстремума или локальных экстремумах, слово «локальный» часто опускают и говорят о точках экстремума (соответственно экстремумах). Но в таких случаях должно быть ясно из текста, рассматриваются ли как точки экстремума концевые точки промежутка.

Теорема 4.1 (Ферма). Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет локальный экстремум и существует производная функции в этой

точке, то $f'(x_0)=0$.

◀По определению производной,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Предположим, для определённости, что $f'(x_0) > 0$. Тогда, в силу теоремы 1.18 о сохранении знака предела, дробь $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ для всех

x из некоторой проколотой окрестности точки x_0 . Следовательно, в этой окрестности $f(x) - f(x_0) > 0$, т.е. $f(x) > f(x_0)$, если $x > x_0$, и $f(x) < f(x_0)$, если $x < x_0$. А это противоречит определению точки локального экстремума. ▶

Отметим, что производная в точке локального экстремума может не существовать и тогда говорить о равенстве нулю производной бессмысленно. Примером является функция $f(x) = |x|$, имеющая в нуле минимум.

Геометрически теорема Ферма означает, что в точке локального экстремума касательная к графику функции, если она существует, должна быть параллельна оси Ox .

2. Теорема Ролля*

Теорема 4.2 (Ролль). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и на концах отрезка принимает равные значения: $f(b) = f(a)$. Тогда существует точка $\gamma \in (a; b)$ такая, что $f'(\gamma) = 0$.

◀Функция, непрерывная на отрезке, принимает на нём в некоторой точке $\alpha \in [a; b]$ наибольшее значение M , а в некоторой точке $\beta \in [a; b]$ наименьшее значение m (см. теорему 2.31). Возможны два случая.

1-й случай. $M = m$. Это означает, что функция постоянная на отрезке и её производная равна нулю в любой точке интервала.

2-й случай. $M \neq m$. В этом случае из-за условия $f(b) = f(a)$ хотя бы одна из точек α или β лежит внутри отрезка, а следовательно, будет точкой локального экстремума. По теореме Ферма производная в такой точке равна нулю. ▶

Геометрически теорема Ролля означает, что гладкая кривая, соединяющая две точки на плоскости, отстоящие от оси Ox на равном расстоянии и лежащие по одну сторону от оси, достигает внутри отрезка хотя бы раз самой «высокой» или самой «низкой» точки (рис.4.2).

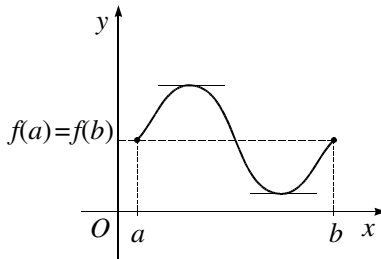


Рис.4.2.

* Ролль Мишель (1652–1719) – французский математик.

3. Теорема о среднем Лагранжа (теорема о конечных приращениях)

Теорема 4.3 (о среднем Лагранжа^{*}). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$. Тогда существует точка $\gamma \in (a; b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(\gamma)(b - a). \quad (4.1)$$

◀ Воспользуемся теоремой Ролля. Введём вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \quad (4.2)$$

Идея её построения ясна из рис.4.3: если из кривой $y = f(x)$ «вычесть» прямую $y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$, проходящую через концы кривой

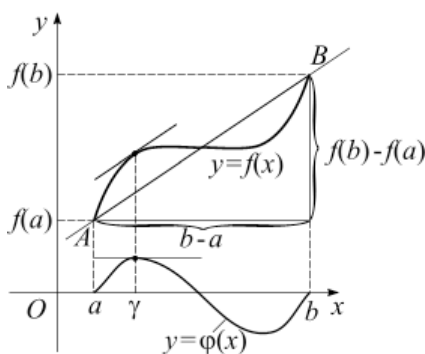


Рис.4.3.

вой $y = f(x)$, то получим кривую, концы которой лежат на оси Ox .

Из формулы (4.2) следует, что функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[a; b]$, дифференцируема на $(a; b)$ и на концах отрезка принимает равные значения: $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 0$. Поэтому существует точка $\gamma \in (a; b)$ такая, что $\varphi'(\gamma) = 0$. Но

$$\varphi'(\gamma) = f'(\gamma) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Отсюда $f'(\gamma) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, или $f(b) - f(a) = f'(\gamma)(b - a)$. ▶

^{*} Лагранж Жозеф Луи (1736–1813) – французский математик и механик.

Записав формулу (4.1) в виде $f'(\gamma) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, $a < \gamma < b$, легко пояснить геометрический смысл теоремы Лагранжа (см. рис.4.3). Отношение $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ есть тангенс угла наклона хорды, стягивающей концы A и B графика функции $y = f(x)$, а $f'(\gamma)$ есть тангенс угла наклона касательной к графику функции в точке с абсциссой γ . Таким образом, теорема Лагранжа геометрически означает, что на графике есть точка, в которой касательная параллельна хорде, стягивающей концы графика.

Замечание. Формула конечных приращений (4.1) верна и в том случае, когда $b < a$. Для доказательства достаточно умножить обе части формулы на -1 .

4. Теорема о среднем Коши

Теорема 4.4 (о среднем Коши). Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, дифференцируемы на интервале $(a; b)$, причём $g'(x) \neq 0$ на $(a; b)$. Тогда существует точка $\gamma \in (a; b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)}. \quad (4.3)$$

◀Отметим $g(b) - g(a) \neq 0$, так как иначе, по теореме Ролля, существовала бы точка α , в которой $g'(\alpha) = 0$. А это противоречит условию теоремы. Введём вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - a).$$

Она непрерывна на $[a; b]$, дифференцируема на $(a; b)$ и на концах отрезка принимает равные значения: $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 0$. Поэтому, по теореме Ролля, существует точка $\gamma \in (a, b)$ такая, что

$$\varphi'(\gamma) = f'(\gamma) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\gamma) = 0. \text{ Отсюда } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)}. \blacktriangleright$$

Замечание. Формула (4.3) верна и в случае $b < a$.

4.2. Раскрытие неопределённостей. Правило Лопиталя

Используя теорему о среднем Коши, докажем полезное правило для раскрытия неопределённостей. Напомним, что предел отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \rightarrow a$ называется *неопределённостью вида $0/0$* , если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

Теорема 4.5 (правило Лопиталя^{*}). Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a , за исключением, быть может, самой точки a , и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

Если существует (конечный или бесконечный) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существу-

ет $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

◀ Пусть, сначала, a — конечное число. Так как $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, то, положив $f(a) = g(a) = 0$, получим, что функции $f(x)$ и $g(x)$ станут непрерывными в точке a . Пусть, для определённости, $x > a$. На отрезке $[a; x]$ выполнены все условия теоремы Коши. Условие $g'(x) \neq 0$ выполнено, так как иначе дробь $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ не определена. Напомним также, что из дифференцируемости функции следует её непрерывность. Поскольку $f(a) = g(a) = 0$, то, по теореме Коши, имеем:

^{*} Лопиталь Антуан (1661–1704) — французский математик.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)},$$

где γ лежит между a и x . Поэтому $\gamma \rightarrow a$ при $x \rightarrow a$ и

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Если $a = \infty$, то, выполнив замену $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$, и пользуясь

доказанным, получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(1/t) \cdot (-1/t^2)}{g'(1/t) \cdot (-1/t^2)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Аналогичная теорема верна и для неопределённостей вида ∞/∞ .

Неопределённости вида $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 с помощью алгебраических преобразований приводятся к виду $0/0$ и ∞/∞ .

Замечания. 1. Если отношение $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ также есть неопределённость вида $0/0$ или ∞/∞ при $x \rightarrow a$ и удовлетворяет условиям теоремы 4.5, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$.

2. Предел отношения функций может существовать, а предел отношения их производных – нет. Например, ясно, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = 1$.

Но $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + \sin x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$ не существует.

3. Прежде чем применить правило Лопиталья, бывает полезным выполнить сначала преобразования, упрощающие дифференцирование (см. ниже пример 4.1).

Пример 4.1. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin x^3}$.

◀Имеем неопределённость вида $0/0$. Заменим сначала знаменатель дроби $\sin x^3$ на эквивалентную функцию x^3 , $x \rightarrow 0$, и только затем применим правило Лопиталья

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{tg} x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{3x^2 \cos^2 x}.$$

Снова имеем неопределённость $0/0$. Учтём, что $\cos^2 x \rightarrow 1$, $x \rightarrow 0$, а затем применим правило Лопиталья ещё раз

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{3x^2 \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cos^2 x \sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}. \blacktriangleright$$

Пример 4.2. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x$.

◀Здесь имеем неопределённость вида 0^0 . Преобразуем её, используя основное логарифмическое тождество и непрерывность показательной функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(e^{\ln x} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0+0} x \ln x}.$$

Предел $\lim_{x \rightarrow 0+0} x \ln x$ есть неопределённость вида $0 \cdot \infty$. Если выражение

$x \ln x$ записать в виде дроби $\frac{\ln x}{1/x}$, то получим неопределённость ∞/∞ . Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{-x^2}{x} = 0.$$

Таким образом, $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0+0} x \ln x} = e^0 = 1. \blacktriangleright$

4.3. Формула Тейлора

1. Многочлен Тейлора

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке a . Тогда можно написать приближённое равенство $f(x) \approx f(a)$. В силу непрерывности функции погрешность приближения есть бесконечно малая величина при $x \rightarrow a$. Если $f(x)$ дифференцируема в точке a , то можно написать $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$. Здесь погрешность приближения есть $o(x-a)$, $x \rightarrow a$. Естественнo предположить, что при дальнейшем добавлении слагаемых вида $c_k(x-a)^k$ приближение функции в окрестности точки a будет становиться всё более точным. При этом желательно иметь формулы для вычисления коэффициентов c_k и оценки погрешности приближения.

Предположим, что функция $f(x)$ дифференцируема $(n+1)$ раз в некоторой окрестности точки a . Составим многочлен

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \end{aligned}$$

(напомним, что по определению считается: $0! = 1$ и $f^{(0)}(x) = f(x)$).

Многочлен $Q_n(x)$ называется *многочленом Тейлора** n -й степени или n -м *многочленом Тейлора* функции $f(x)$ по степеням $x-a$.

2. Остаточный член формулы Тейлора

Многочлен $Q_n(x)$ совпадает с $f(x)$ в точке a . Если функция $f(x)$ сама является многочленом степени *не выше* n , то $Q_n(x) = f(x)$

* Тейлор Брук (1685–1731) – английский математик.

для всех x (см. стр.115). Но в общем случае $Q_n(x) \neq f(x)$ для $x \neq a$. За меру несовпадения $f(x)$ с $Q_n(x)$ возьмём разность

$$r_n(x) = f(x) - Q_n(x), \quad (4.4)$$

называемую *остаточным членом формулы Тейлора*. Функция $r_n(x)$ есть погрешность (зависящая от x), которую мы делаем, заменяя функцию её многочленом Тейлора. Поэтому важно найти формулы, позволяющие оценить $r_n(x)$ для каждого заданного x .

Теорема 4.6. Если функция $f(x)$ дифференцируема $(n+1)$ раз в некоторой окрестности точки a , то для любого x из этой окрестности

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\gamma)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad (4.5)$$

где число γ лежит между a и x .

►Проведём доказательство для $n=3$. Для произвольного n доказательство аналогичное. Итак, рассмотрим

$$r_3(x) = f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 \right).$$

Дифференцируя это равенство, найдём:

$$\begin{aligned} r_3'(x) &= f'(x) - \left(f'(a) + \frac{2f''(a)}{2!}(x-a) + \frac{3f'''(a)}{3!}(x-a)^2 \right); \\ r_3''(x) &= f''(x) - \left(f''(a) + \frac{3 \cdot 2f'''(a)}{3!}(x-a) \right); \quad r_3'''(x) = f'''(x) - f'''(a); \\ r_3^{(4)}(x) &= f^{(4)}(x). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая ещё, что $f(a) = Q_3(a)$, для $x=a$ получаем:

$$r_3(a) = r_3'(a) = r_3''(a) = r_3'''(a) = 0. \quad (4.6)$$

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = (x-a)^4$. Дифференцируя её и подставляя вместо x число a , будем иметь аналог равенств (4.6):

$$\varphi(a) = \varphi'(a) = \varphi''(a) = \varphi'''(a) = 0. \quad (4.7)$$

Однако $\varphi^{(4)}(x) = 4!$.

Используя равенства (4.6), (4.7) и четыре раза теорему о среднем Коши, найдём:

$$\begin{aligned}\frac{r_3(x)}{\varphi(x)} &= \frac{r_3(x) - r_3(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{r_3'(\gamma_1)}{\varphi'(\gamma_1)} = \frac{r_3'(\gamma_1) - r_3'(a)}{\varphi'(\gamma_1) - \varphi'(a)} = \\ &= \frac{r_3''(\gamma_2)}{\varphi''(\gamma_2)} = \frac{r_3'''(\gamma_3)}{\varphi'''(\gamma_3)} = \frac{r_3^{(4)}(\gamma_4)}{\varphi^{(4)}(\gamma_4)},\end{aligned}$$

где о точках γ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ известно лишь то, что они лежат между a и x . Из полученного равенства, обозначая γ_4 как γ и учитывая, что $r_3^{(4)}(\gamma) = f^{(4)}(\gamma)$, а $\varphi^{(4)}(x) = 4!$, окончательно получаем:

$$r_3(x) = \frac{f^{(4)}(\gamma)}{4!}(x-a)^4. \blacktriangleright$$

Формула (4.5) называется *формой Лагранжа остаточного члена*.

Очевидно, что $x'' = 0$, $(x^2)''' = 0$ и т.д. Следовательно, $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$, если $f(x) = P_m(x) = a_mx^m + \dots + a_0$ – многочлен степени $m \leq n$. Поэтому для многочленов степени не выше n остаточный член $r_n(x) \equiv 0$ и $P_m(x) \equiv Q_n(x)$.

3. Формула для произвольной функции с различными формами остаточного члена

Из (4.4) следует $f(x) = Q_n(x) + r_n(x)$. Заменяя здесь $r_n(x)$ по формуле (4.5), получим равенство, называемое *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа*,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\gamma)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (4.8)$$

или в развёрнутом виде

$$\begin{aligned}f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots \\ &\dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\gamma)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.\end{aligned}$$

Если производная $f^{(n+1)}(x)$ ограничена в хотя бы малой окрестности точки a , то остаточный член $r_n(x) = o\left((x-a)^n\right)$, $x \rightarrow a$. В самом деле, из (4.5) находим $\frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\gamma)}{(n+1)!}(x-a) \rightarrow 0$, если $x \rightarrow a$. Формула $r_n(x) = o\left((x-a)^n\right)$, $x \rightarrow a$ называется *формой Пеано** остаточного члена, а равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o\left((x-a)^n\right), \quad x \rightarrow a -$$

формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Применение формулы Тейлора с той или иной формой остаточного члена зависит от решаемой задачи. Например, при вычислении пределов функций часто удобно использовать форму Пеано, а при вычислении приближённых значений функций – форму Лагранжа.

В частном случае $a=0$ формулу Тейлора называют *формулой Маклорена***:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x).$$

Подставляя вместо $r_n(x)$ выражение $\frac{f^{(n+1)}(\gamma)}{(n+1)!}x^{n+1}$, где γ лежит между 0 и x , или $o\left(x^n\right)$, $x \rightarrow 0$, получим формулу Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа или в форме Пеано.

* Пеано Джузеппе (1858–1932) – итальянский математик.

** Маклорен Колин (1698–1746) – шотландский математик.

4. Разложения по формуле Маклорена функций e^x , $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$

Далее будет удобно число γ , лежащее между 0 и x , записывать в виде θx , где $0 < \theta < 1$.

1) Разложение функции $f(x) = e^x$. Любая производная e^x равна e^x . Поэтому $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ для любого n и по формуле (4.8)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (4.9)$$

С остаточным членом в форме Пеано разложение функции e^x имеет вид

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

2) Разложение функции $f(x) = \cos x$. Находим последовательно $f(0) = \cos 0 = 1$, $f'(x) = -\sin x$ и $f'(0) = -\sin 0 = 0$, $f''(x) = -\cos x$ и $f''(0) = -1$, $f'''(x) = \sin x$ и $f'''(0) = 0$. Так как $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$, то далее получим повторение значений производных. Таким образом,

$$\begin{aligned} \cos x = & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \\ & + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} (\pm \cos(\theta x)), \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned} \quad (4.10)$$

В остаточном члене выражение $\pm \cos(\theta x)$ берётся со знаком плюс, если n нечётное число, и со знаком минус в противном случае. С остаточным членом в форме Пеано разложение косинуса имеет вид

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0.$$

3) Разложение функции $f(x) = \sin x$. Аналогично предыдущему:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} (\pm \cos(\theta x)), \quad 0 < \theta < 1. \quad (4.11)$$

В остаточном члене выражение $\pm \cos(\theta x)$ берётся со знаком плюс, если n – чётное число, и со знаком минус в противном случае. С остаточным членом в форме Пеано разложение синуса имеет вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}), \quad x \rightarrow 0.$$

4) *Разложение функции* $f(x) = \ln(1+x)$. Находим последовательно $f(0) = \ln 1 = 0$, $f'(x) = (1+x)^{-1}$ и $f'(0) = 1$, $f''(x) = -(1+x)^{-2}$ и $f''(0) = -1$, $f'''(x) = 2(1+x)^{-3}$ и $f'''(0) = 2$. По индукции получим $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$. Следовательно,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (4.12)$$

С остаточным членом в форме Пеано разложение $\ln(1+x)$ имеет вид

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^{n+1}), \quad x \rightarrow 0.$$

5) *Разложение функции* $f(x) = (1+x)^\alpha$. Так как $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, ..., $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, то формула Маклорена имеет вид

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (4.13)$$

С остаточным членом в форме Пеано разложение $(1+x)^\alpha$ имеет вид

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

Отметим, если α – натуральное число, то остаточный член $r_n(x)$ будет тождественно равен нулю для $n \geq \alpha$.

5. Вычисление приближённых значений функций с помощью формулы Тейлора

Если отбросить остаточный член в формуле Тейлора (4.8), то получим приближённое равенство

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad (4.14)$$

которое функцию сложного вида заменяет более простой – многочленом. *Вычисление многочлена для любого значения аргумента требует выполнения только арифметических действий.* Поэтому замена функций, например синусов, косинусов, корней и т.п., на их многочлены Тейлора применяется в устройствах, «умеющих» выполнять только арифметические операции.

Несложно доказать, что для разложений (4.9) – (4.11) остаточные члены стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$ для любого x . Поэтому, увеличивая число членов в формулах Маклорена для функций e^x , $\cos x$, $\sin x$, можно вычислить их значения с любой точностью. Для функции $\ln(1+x)$ такой вывод справедлив, если $-1 < x \leq 1$, а для $(1+x)^\alpha$, если $-1 < x < 1$.

Заменяя вычисление значения функции на вычисление значения её многочлена Тейлора, желательно уметь отвечать на следующие вопросы: 1) какая точность вычисления гарантируется, если взять определённое число нескольких первых членов формулы Тейлора?; 2) сколько нужно взять первых членов формулы Тейлора, чтобы гарантировать вычисление с заданной точностью?

Покажем на примерах, как можно искать ответы на поставленные вопросы.

Пример 4.3. Оценить погрешность формулы $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$, если $-1 \leq x \leq 1$.

◀ По формуле Маклорена (4.9) для e^x погрешность равна $r_5(x) = \frac{x^6}{6!} e^{\theta x}$, где $0 < \theta < 1$. Значение θ неизвестно. Поэтому оценим положительную величину $e^{\theta x}$ сверху. Очевидно, что $e^{\theta x} < e^1 < 3$, если $x \leq 1$. Следовательно, для $-1 \leq x \leq 1$ абсолютная погрешность приближённого равенства

$$|r_5(x)| = \frac{|x|^6}{6!} |e^{\theta x}| < \frac{1^6 \cdot 3}{720} < 0,005. \blacktriangleright$$

Пример 4.4. Сколько членов разложения Маклорена нужно взять, чтобы вычислить $\sin x$, $|x| \leq 1/2$ с точностью, не меньшей $2 \cdot 10^{-5}$.

◀ Погрешность приближённого равенства (см. (4.11))

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

равна $r_{2n}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} (\pm \cos(\theta x))$, $0 < \theta < 1$. Так как $|\pm \cos(\theta x)| \leq 1$

для любых θ и x , то $|r_{2n}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq \frac{0,5^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Теперь найдём

наименьшее n , для которого $\frac{0,5^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq 0,0001$. Это можно сделать

подбором n . Если $n=1, 2$, то $\frac{0,5^{2n+1}}{(2n+1)!} \geq \frac{1}{2^5 \cdot 5!} = \frac{1}{3840} > 0,00002$.

А для $n=3$ имеем $\frac{0,5^7}{7!} = \frac{1}{645120} < 0,00002$.

Таким образом, точность вычисления $\sin x$ для $|x| \leq 1/2$ не меньше чем $2 \cdot 10^{-5}$ обеспечивает приближение с тремя членами $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$. ►

Замечание. Из вида остаточных членов формул (4.9) - (4.13) следует, что приближение рассмотренных функций многочленом Тейлора фиксированной степени тем лучше, чем меньше модуль числа x . Это наглядно видно из рис.4.4, где $Q_1(x) = x$, $Q_3(x) = x - x^3/6$ – первые многочлены Тейлора функции $\sin x$.

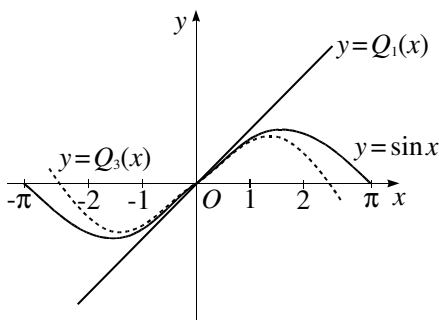


Рис.4.4.

6. Вычисление пределов функций с помощью формулы Тейлора

Формула Тейлора может быть использована для вычисления пределов функций. В этом случае часто удобно пользоваться формой Пеано остаточного члена.

Пример 4.5. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.

◀ Заменяем $\sin x$ на $x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$, $x \rightarrow 0$. Получим

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \left(-\frac{1}{6} + o(x) \right)}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{6} + o(x) \right) = -\frac{1}{6}. \blacktriangleright\end{aligned}$$

Отметим следующее. В разделе 2 была доказана теорема 2.25 о возможности замены функций на эквивалентные им при вычислении предела произведения или частного функций. Там же было отмечено, что замена функций на эквивалентные в сумме и разности *может* привести к неверному результату. Формула Тейлора объясняет причины этого. В вышеприведённом примере на основании формулы Тейлора заключаем, что разность $\sin x - x \approx -x^3/6$, $x \rightarrow 0$, т.е. не равна нулю, как получилось бы при замене $\sin x$ на эквивалентную величину x . Поэтому в примере 4.5 замена $\sin x$ на эквивалентную величину ведёт к неверному результату. При вычислении $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 2x}{x^3}$, заменяя $\sin x$ на эквивалентную величину x , получим верный результат, так как в этом случае при $x \rightarrow 0$ разность $\sin x - 2x \approx -x$.

5. Исследование и построение графиков функций

5.1. Достаточные условия постоянства и монотонности

Пусть задано или найдено аналитическое выражение, описывающее функциональную зависимость между переменными величинами. Для многих задач, в частности при построении графика зависимости, важно знать такие её свойства как монотонность, наличие экстремумов, асимптот и т.п. В решении этих вопросов эффективными оказываются рассмотренные выше понятия и методы дифференциального исчисления.

Теорема 5.1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f'(x) = 0$ на $(a; b)$, то $f(x) = C = \text{const}$ на $[a; b]$.

◀ Возьмём на отрезке $[a; b]$ какую-нибудь точку x_0 и зафиксируем её. Пусть x – другая произвольная точка отрезка. Рассмотрим отрезок $[x_0; x]$, если $x > x_0$, и $[x; x_0]$, если $x < x_0$. В обоих случаях выполнены условия теоремы 4.3. Поэтому

$$f(x) - f(x_0) = f'(\gamma)(x - x_0) = 0,$$

так как точка γ лежит между x_0 и x , а значит, принадлежит интервалу $(a; b)$, в каждой точке которого производная $f'(x)$ равна нулю. Таким образом, в любой точке x функция принимает одно и то же значение $C = f(x_0)$, т.е. является постоянной. ►

Теорема 5.2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) на $(a; b)$, то $f(x)$ возрастает (убывает) на этом отрезке.

◀ Пусть $f'(x) > 0$. Докажем, что функция возрастает на $[a; b]$, т.е. $f(x_1) < f(x_2)$ для любых $x_1 < x_2$ из отрезка. Для доказательства рассмотрим отрезок $[x_1; x_2]$, на котором функция удовлетворяет усло-

виям теоремы Лагранжа. Поэтому $f(x_2) - f(x_1) = f'(\gamma)(x_2 - x_1) > 0$, поскольку $f'(\gamma) > 0$ и $x_2 - x_1 > 0$. Таким образом, $f(x_2) > f(x_1)$. Аналогично доказывается убывание функции, если $f'(x) < 0$. ►

Замечание. Из приведённых доказательств нетрудно видеть, что утверждения теорем 5.1 и 5.2 справедливы и для случая функции, заданной на интервале $(a; b)$, в том числе бесконечном.

5.2. Необходимые и достаточные условия существования экстремумов

Теорема 5.3 (необходимое условие). Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и в точке $x_0 \in (a; b)$ имеет локальный экстремум, то $f'(x_0) = 0$.

Данная теорема следует из теоремы Ферма.

Для дифференцируемой функции условие обращения в нуль производной в некоторой точке есть *необходимое условие существования локального экстремума* в такой точке, но не является *достаточным*. Например, для функции $y = x^3$ производная $y' = 3x^2 = 0$, если $x = 0$. Но в точке $x = 0$ экстремума функция не имеет.

Точки, в которых производная функции равна нулю, называются *стационарными* точками. Таким образом, для дифференцируемой функции всякая точка локального экстремума является стационарной, но обратное утверждение неверно.

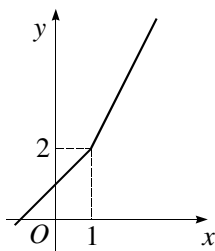


Рис.5.1.

Функция может, но не обязательно, иметь экстремум также в точках, в которых производная не существует. Например, функция $y = |x|$ имеет минимум в точке $x = 0$ и не дифференцируема в ней. Функция $y = \begin{cases} x+1, & x \leq 1, \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$ не имеет производной в точке $x = 1$, но экстремума в ней не имеет (рис.5.1).

Точки, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются *критическими*.

Рассмотрим вопрос о достаточных условиях существования локального экстремума.

Из доказанного выше достаточного условия монотонности функции нетрудно получить следующее утверждение.

Теорема 5.4 (*первое достаточное условие экстремума*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и существует окрестность $U(x_0)$, такая, что слева от точки x_0 $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), а справа $f'(x_0) < 0$ ($f'(x_0) > 0$). Тогда точка x_0 является точкой локального максимума (минимума).

◀Возьмём отрезок $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$, принадлежащий окрестности $U(x_0)$. Пусть $f'(x) > 0$ на $(x_0 - \delta; x_0)$ и $f'(x) < 0$ на $(x_0; x_0 + \delta)$. Тогда, по теореме 5.2, функция возрастает на $[x_0 - \delta; x_0]$ и, значит, $f(x) < f(x_0)$ для всякого $x \in [x_0 - \delta; x_0)$. А на $[x_0; x_0 + \delta]$ функция убывает, и поэтому $f(x) < f(x_0)$ для $x \in (x_0; x_0 + \delta]$. Таким образом, $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$, $x \neq x_0$, что и означает, что точка x_0 является точкой локального максимума.

Аналогично рассматривается случай, когда слева от точки x_0 производная отрицательна, а справа – положительна. ▶

Кратко, опуская детали, теорему 5.4 формулируют так: *если производная меняет знак при переходе через точку x_0 , то x_0 – точка локального экстремума. Причём, если производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 – точка локального максимума, если с минуса на плюс, то x_0 – точка локального минимума.*

Замечание. Условия теоремы 5.4 не являются необходимыми для существования экстремума в стационарной точке. Например, функция

$$f(x) = x^2 \left(2 - \sin \frac{1}{x} \right), \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0,$$

имеет минимум в нуле, так как $f(x) > 0$ для всех $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Однако несложно доказать, что её производная не сохраняет знак ни слева, ни справа в любой, даже малой, окрестности нуля.

Теорема 5.5 (*второе достаточное условие экстремума*). Пусть $f'(x_0) = 0$ и в некоторой окрестности точки x_0 существует непрерыв-

ная вторая производная $f''(x)$. Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 есть точка локального минимума, а если $f''(x_0) < 0$, то x_0 есть точка локального максимума.

◀Представим функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 , учитывая, что $f'(x_0) = 0$,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(\gamma)}{2}(x - x_0)^2, \quad (5.1)$$

где γ лежит между x_0 и x .

Пусть, например, $f''(x_0) > 0$. Тогда $f''(x) > 0$ в некоторой окрестности точки x_0 в силу теоремы 2.26 о сохранении знака непрерывной функций. В этой окрестности $\frac{f''(\gamma)}{2}(x - x_0)^2 > 0$, $x \neq x_0$, и из (5.1) заключаем, что $f(x) > f(x_0)$, $x \neq x_0$, т.е. x_0 – точка локального минимума. ▶



Рис.5.2.

Геометрическая иллюстрация (рис.5.2) теоремы 5.5 следует из равенства (5.1) и хорошо известного факта из школьного курса математики: парабола, ветви которой направлены вверх, имеет минимум в вершине, а если её ветви направлены вниз – максимум. Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$, то график функции при x , близких к x_0 , будет хорошо приближаться параболой

$$y = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \quad \text{с}$$

вершиной в точке x_0 и ветвями, направленными вверх. Парабола, ветви которой направлены вверх, имеет минимум в вершине. Если $f''(x_0) < 0$, то ветви параболы направлены вниз и будет максимум в вершине.

Применение первого достаточного условия экстремума требует решения неравенств $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$. Поэтому оно обычно используется, когда функция исследуется одновременно на монотонность и экстремумы. Кроме того, первое условие не требует существования производной в точке возможного экстремума. Например, для нахождения экстремумов функции $y = |x|$ первое условие применимо, а второе – нет. Но если существует вторая производная в стационарной точке, а решение неравенств $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$ затруднительно и нет необходимости выяснять монотонность функции, то использование второго условия может оказаться эффективнее.

Пример 5.1. Исследовать на монотонность и экстремумы функцию $y = x\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft 1) \text{ Находим первую производную: } y' &= \sqrt[3]{(x-1)^2} + x \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}} = \\ &= \frac{5x-3}{3\sqrt[3]{x-1}}. \end{aligned}$$

$$2) \text{ Находим критические точки: } y' = \frac{5x-3}{3\sqrt[3]{x-1}} = 0, \text{ если } x = \frac{3}{5} = 0,6; y' \text{ не существует в точке } x = 1.$$

3) Решаем неравенство: $y' = \frac{5x-3}{3\sqrt[3]{x-1}} > 0$. Отмечаем на числовой прямой (рис.5.3) точки, в которых производная равна нулю или не существует, и определяем знак производной в каждом из полученных промежутков (например, по её знаку в какой-нибудь одной точке промежутка).

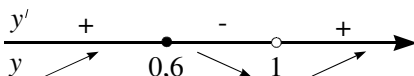


Рис.5.3.

4) Зная знаки производной, заключаем, что на каждом из промежутков $(-\infty; 0,6]$ и $[1; +\infty)$ функция возрастает, а на промежутке $[0,6; 1]$ – убывает.

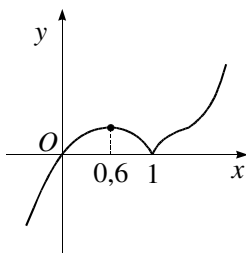


Рис.5.4.

5) Из теоремы 5.4 следует, что $x=0,6$ – точка локального максимума, а $x=1$ – минимума.

6) Находим значения экстремумов: $y_{\max} = y(0,6) = 0,6\sqrt[3]{0,16} \approx 0,33$ и $y_{\min} = y(1) = 0$.

График функции изображён на рис.5.4. ►

5.3. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Во многих прикладных задачах требуется найти оптимальное в каком-то смысле решение. Поиск оптимального решения часто может быть сведён к нахождению наибольшего или наименьшего значений некоторой функции.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда она на этом отрезке имеет наибольшее и наименьшее значения (см. теорему 2.31). Эти значения (одно или оба) могут приниматься как внутри отрезка, так и на его концах. Если наибольшее (наименьшее) значение достигается внутри отрезка, то соответствующая точка будет точкой локального максимума (минимума). Тогда производная функции в этой точке либо равна нулю, либо не существует, т.е. точка является критической.

Из этих рассуждений вытекает следующий алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции, имеющей на нём *конечное число критических точек*:

- 1) находим критические точки, принадлежащие отрезку;
- 2) вычисляем значения функции в критических точках и на концах отрезка;
- 3) из полученных чисел выбираем наибольшее (оно будет наибольшим значением функции на отрезке) и наименьшее (оно будет наименьшим значением функции на отрезке).

Замечание. В прикладных задачах часто встречается случай, когда нужно найти *только наименьшее* или *только наибольшее* значение и между a и b есть *только одна* критическая точка. Если эта точка будет

точкой локального минимума (максимума), то в ней достигается наименьшее (наибольшее) значение функции на отрезке $[a; b]$ и, следовательно, не нужно вычисление значений функции на концах отрезка. Сказанное справедливо и в случае интервалов, в том числе бесконечных.

Пример 5.2. Из квадратного листа жести со стороной a , вырезая по углам равные квадраты и сгибая края (рис.5.5), можно изготовить открытую коробку. При каких вырезах углов получится коробка наибольшей вместимости?

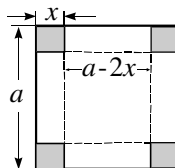


Рис.5.5.

◀Составим математическую модель задачи. Пусть сторона вырезаемого углового квадрата равна x . Тогда дно коробки будет квадратом со стороной $a - 2x$. Высота коробки будет равна x . Объём коробки выразится формулой: $V = x(a - 2x)^2$, причём $0 < x < a/2$.

Итак, математическая модель задачи: найти $x \in (0; a/2)$, при котором функция $V = x(a - 2x)^2$ принимает наибольшее значение.

Находим производную и её нули: $x = a/2$ и $x = a/6$. Интервалу $(0; a/2)$ принадлежит только одна точка $x = a/6$. Слева от этой точки $V' > 0$, а справа – $V' < 0$. Поэтому $x = a/6$ – точка локального максимума, а, в силу сделанного выше замечания, в ней функция имеет наибольшее значение $V_{\text{наиб}} = \frac{2a^3}{27}$. ▶

5.4. Выпуклость графика функции. Точки перегиба

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором интервале. Тогда к графику функции в каждой точке интервала может быть построена касательная, непараллельная оси Oy . В разных точках график функции и касательная могут иметь разное расположение: на каком-то участке, *содержащем точку касания*, касательная может быть над графиком, на другом – под графиком, а может лежать по разные стороны графика (рис.5.6).

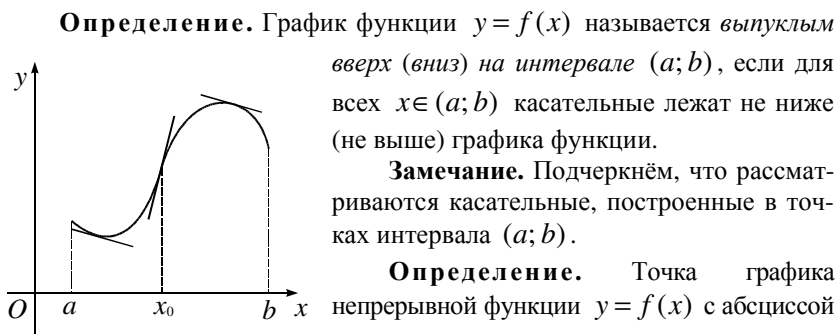


Рис.5.6.

Определение. График функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вверх (вниз)* на интервале $(a; b)$, если для всех $x \in (a; b)$ касательные лежат не ниже (не выше) графика функции.

Замечание. Подчеркнём, что рассматриваются касательные, построенные в точках интервала $(a; b)$.

Определение. Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$ с абсциссой x_0 называется *точкой перегиба графика функции*, если существует такой интервал, содержащий точку x_0 , что слева и справа от

точки x_0 график функции имеет разные направления выпуклости.

Замечание. Если существует касательная к графику функции в точке перегиба $(x_0, f(x_0))$, то в некоторой окрестности x_0 график функции для аргументов x слева и справа от точки x_0 расположен по разные стороны касательной.

Например, на рис.5.6 на интервале $(a; x_0)$ график имеет выпуклость вниз, на $(x_0; b)$ – вверх, а x_0 – абсцисса точки перегиба.

Выпуклым вниз всей числовой прямой является график функции $y = x^2$, а функции $y = -x^2$ – выпуклым вверх.

Теорема 5.6. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(a; b)$. Если $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) на $(a; b)$, то график функции на этом интервале является выпуклым вниз (вверх).

◀ Пусть $f''(x) > 0$ и x_0 – произвольная точка интервала. В соответствии с определением выпуклости нужно доказать, что для любого $(a; b)$ значение функции $y = f(x)$ минус значение касательной $Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ есть положительная величина для $x \neq x_0$.

Разложим функцию $f(x)$ по степеням $x - x_0$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\gamma)}{2}(x - x_0)^2,$$

где γ лежит между x_0 и x . Отсюда искомая разность равна $\frac{f''(\gamma)}{2}(x-x_0)^2 > 0$, если $f''(x) > 0$, $x \neq x_0$. Аналогично рассматривается случай $f''(x) < 0$. ►

Теорема 5.7 (*необходимое условие точки перегиба*). Пусть точка графика функции $f(x)$ с абсциссой x_0 есть точка перегиба графика. Если в точке x_0 существует непрерывная вторая производная функции, то $f''(x_0) = 0$.

◄Предположим обратное, например, $f''(x_0) > 0$. Тогда, по свойствам непрерывных функций, существует интервал $(a; b)$, содержащий точку x_0 , такой, что $f''(x) > 0$ для всех $x \in (a; b)$. В таком случае, по предыдущей теореме, на $(a; b)$ график функции будет выпуклым вниз, что противоречит условию теоремы. ►

Равенство нулю второй производной в какой-то точке еще не означает, что соответствующая точка на графике функции будет точкой перегиба. Например, для функции $y = x^4$ вторая производная $y'' = 12x^2 = 0$ в точке $x = 0$. Однако график функции является выпуклым вниз на всей числовой прямой.

Приведённая ниже теорема о достаточных условиях существования точки перегиба непосредственно следует из определения точки перегиба и теоремы 5.6.

Теорема 5.8 (*достаточное условие точки перегиба*). Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности точки x_0 , $f''(x_0) = 0$ и $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0 , то точка графика функции с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Простым примером функции, график которой имеет точку перегиба, является функция $y = x^3$. Для этой функции $y'' = 6x = 0$ при $x = 0$, $y'' > 0$ при $x > 0$, $y'' < 0$ при $x < 0$. График функции будет выпуклым вверх на $(-\infty; 0)$, вниз – на $(0; +\infty)$. Точка $x = 0$ есть точка перегиба: для $x < 0$ график функции лежит под касательной, а для $x > 0$ – над касательной $y = 0$.

5.5. Асимптоты

Замечательной характеристикой формы графика функции являются, при их наличии, асимптоты – прямые, к которым неограниченно приближается график. Для удобства изучения будем различать вертикальные и наклонные асимптоты.

Определение. Прямая $x=a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y=f(x)$, если хотя бы один из пределов

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \text{ или } \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \text{ равен бесконечности.}$$

Например, графики функций $y=1/x$, $y=\ln x$ имеют вертикальную асимптоту $x=0$, график функции $y=\operatorname{tg} x$ имеет бесконечно много вертикальных асимптот: $x=\pi/2$, $x=-\pi/2$, $x=3\pi/2$,

Из определения ясно, что прямая $x=a$ может быть вертикальной асимптотой графика функции только тогда, когда точка a есть точка разрыва функции, причём второго рода (случай функций $y=1/x$, $y=\operatorname{tg} x$), или является граничной точкой области определения (случай функции $y=\ln x$).

Определение. Прямая $y=kx+b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y=f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx - b) = 0$.

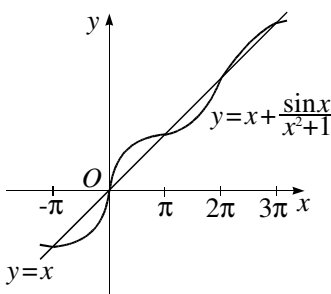


Рис.5.7.

Например, для графика функции $f(x) = x + \frac{\sin x}{x^2 + 1}$ прямая $y=x$ будет наклонной асимптотой, так как $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x^2 + 1} = 0$ (рис.5.7).

Отметим, что график функции может пересекать наклонную асимптоту бесконечное число раз.

Если $f(x) - kx - b \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ (при $x \rightarrow -\infty$), то прямая $y=kx+b$ называется *правой* (соответственно *левой*) *наклонной асимптотой*.

Если $k=0$, т.е. существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ ($\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$), то наклонную асимптоту называют *горизонтальной* (*правой горизонтальной*, *левой горизонтальной*). Например, для графика функции $y = 1/x$ прямая $y = 0$ будет горизонтальной асимптотой.

Наклонные асимптоты могут быть найдены с помощью следующей теоремы.

Теорема 5.9. Если существуют конечные пределы

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx), \quad (5.2)$$

то прямая $y = kx + b$ есть наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$.

◀ Действительно, если оба предела (5.2) существуют и конечны, то из второго предела и арифметических свойств предела функции найдем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx - b) = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) - \lim_{x \rightarrow \infty} b = 0,$$

что и требовалось доказать. ▶

Несложно доказать и обратное: *если прямая $y = kx + b$ есть наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$, то числа k и b удовлетворяют равенствам (5.2)*. Поэтому, если хотя бы один из пределов (5.2) не существует, то наклонных асимптот у графика функции нет.

Сказанное выше справедливо и для правой или левой наклонной асимптоты.

Пример 5.3. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^2 + x - 1}{2x + 2}$.

◀ Функция имеет разрыв в точке $x = -1$. Найдём односторонние пределы при $x \rightarrow -1$. Числитель $x^2 + x - 1 \rightarrow -1$ при $x \rightarrow -1$ как справа, так и слева. Знаменатель $2x + 2$ будет положительным и стремится к нулю при $x \rightarrow -1 + 0$. Поэтому $y \rightarrow -\infty$, если $x \rightarrow -1 + 0$. Аналогично рассуждая, заключаем, что $y \rightarrow +\infty$, если $x \rightarrow -1 - 0$. Итак, прямая $x = -1$ – вертикальная асимптота.

Ищем наклонные асимптоты:

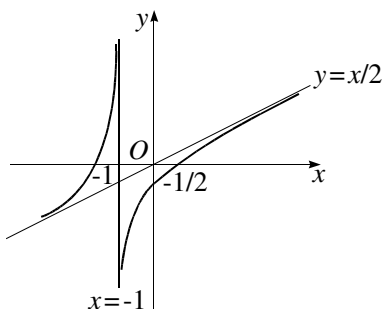


Рис.5.8.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 1}{x(2x + 2)} = \frac{1}{2};$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x - 1}{2x + 2} - \frac{1}{2}x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{2x + 2} = 0.$$

Таким образом, прямая $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ — наклонная асимптота (рис.5.8). ►

5.6. Схема исследования и построения графиков функций

Часто применяемый на практике приём построения графика функции «по точкам» имеет принципиальные недостатки. Точки нужно брать достаточно густо, что требует большого объёма вычислений. Но даже при большом количестве выбранных точек с большой вероятностью не будут найдены такие особые, важнейшие точки графика, как точки экстремума, перегиба. Поэтому для выяснения главных особенностей графика функции выполняют исследование функции.

Под исследованием функции $y = f(x)$ обычно понимают нахождение:

- 1) естественной области определения функции;
- 2) точек разрыва функции и определение их характера;
- 3) асимптот;
- 4) промежутков возрастания, убывания и точек экстремума, значений функции в точках экстремума;
- 5) промежутков выпуклости вверх, вниз и точек перегиба.

В исследование полезно включать также нахождение точек пересечения графика функции с осями координат, установление чётности, нечётности функции.

На основании выполненного исследования строят график функции. Целесообразно намечать эскиз графика по мере выполнения исследования.

Пример 5.4. Исследовать функцию $y = \frac{\ln x}{x}$ и построить её график.

◀1) Функция определена на $(0; +\infty)$.

2) Точек разрыва нет.

3) Ищем вертикальные асимптоты. Найдём предел справа в точке $x=0$ – граничной точке области определения: $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$, так как

числитель стремится к минус бесконечности, а знаменатель – к нулю, оставаясь положительным. Следовательно, прямая $x=0$ – вертикальная асимптота графика. Ищем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0; \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - 0x \right) = 0.$$

Следовательно, прямая $y=0$ есть правая горизонтальная асимптота графика.

4) Находим производную $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Производная существует на $(0; +\infty)$.

5) $y' = 0$, если $x = e \approx 2,7$. Определяем знаки производной (рис.5.9,а). Функция на промежутке $(0; e]$ возрастает, на $[e; +\infty)$ – убывает. Значит, $x=e$ – точка максимума, $y_{\max} = y(e) = 1/e \approx 0,4$.

6) Находим $y'' = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$, $y'' = 0$, если $x = \sqrt{e^3} \approx 4,5$. Определяем знаки второй производной (рис.5.9,б). График функции на интервале $(0; \sqrt{e^3})$ является выпуклым вверх, на интервале $(\sqrt{e^3}; +\infty)$ – вниз.

Точка с координатами $x = \sqrt{e^3}$, $y = y(\sqrt{e^3}) = \frac{3}{2\sqrt{e^3}} \approx 0,3$ – точка перегиба графика.

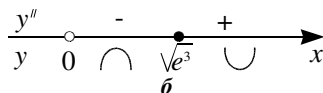
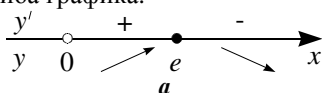


Рис.5.9.

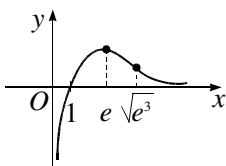


Рис.5.10.

7) Функция $\frac{\ln x}{x} = 0$ при $x=1$. График функции пересекает ось абсцисс в точке $x=1$ и не имеет точек пересечения с осью ординат.

На основании проведённого исследования строим график функции (рис.5.10).►

5.7. Методы численного решения уравнений

Рассмотрим задачу о решении уравнения

$$f(x) = 0. \quad (5.3)$$

Из школьного курса математики известно, что лишь для немногих типов уравнений существуют формулы, позволяющие точно найти корни уравнения. Поэтому важное значение имеют методы приближённого решения уравнений. Рассмотрим некоторые из них.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и на концах его имеет значения разных знаков. Тогда, по теореме 2.32, на интервале $(a; b)$ есть хотя бы один корень уравнения (5.3).

Отсюда следует способ нахождения корней уравнения, называемый *методом деления отрезка пополам*. Проиллюстрируем его на примере.

Пример 5.5. Найти приближённо корень уравнения $x^3 + 2x - 4 = 0$.

◄Функция $f(x) = x^3 + 2x - 4$ непрерывна и, легко заметить, что $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 8 > 0$. Следовательно, на отрезке $[1; 2]$ есть корень уравнения. Делим отрезок пополам. В точке деления $f(1,5) = 2,3... > 0$, и поэтому уточняем, что корень уравнения принадлежит отрезку $[1; 1,5]$. Разделив его пополам и найдя знак $f(1,25) = 0,4... > 0$, заключаем, что корень принадлежит отрезку $[1; 1,25]$. Следовательно, $x = 1,125$ (середина последнего отрезка) будет приближённым значением корня уравнения с точностью не менее $1/8$. Если процедуру повторить ещё раз, то точность вычисления корня улучшится вдвое.►

Заметим, что для возрастающей (убывающей) на $[a; b]$ функции с разными знаками на концах отрезка корень будет единственным. В таком случае говорят, что корень *изолирован* и $[a; b]$ есть *отрезок изоляции корня*. Отрезок $[a; b]$ будет отрезком изоляции корня, если функция на его концах имеет значения разных знаков и производная положительна (отрицательна) на $[a; b]$.

Недостатком метода деления отрезка пополам нахождения приближённого значения корня уравнения является его медленная сходимость: на каждом шаге точность вычисления корня увеличивается лишь в два раза.

Следующий метод является более эффективным, но и более деликатным.

Снова предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и на концах его имеет значения разных знаков. Добавим условие дифференцируемости функции на $[a; b]$. Пусть $a < \gamma < b$ – корень уравнения (5.3). Возьмём точку $x_0 \in [a; b]$ и запишем уравнение касательной

к графику функции в этой точке: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Заменим приблизительно график функции на эту касательную и возьмём в качестве приближённого значения корня функции абсциссу x_1 точки пересечения касательной с осью Ox (рис.5.11), т.е. значение x_1 должно удовлетворять уравнению $f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0$.

Отсюда

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \quad (5.4)$$

Подставляя в правую часть уравнения (5.4) вместо первоначально выбранного числа x_0 найденное значение x_1 , вычисляем следующее приближение x_2 корня и т.д.

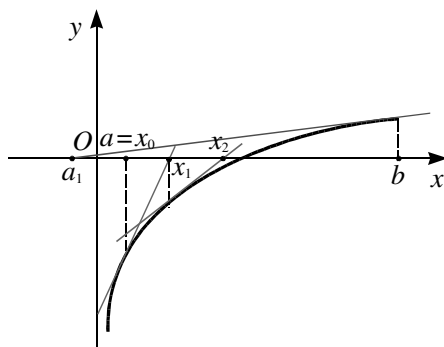


Рис.5.11.

Рассмотренный метод нахождения корней называется *методом касательных*, или *методом Ньютона*.

Метод касательных позволяет при небольшом объёме вычислений находить корни с любой точностью. Но сходимость последовательности приближённых значений к *изолированному* корню гарантируется при выполнении следующих условий: 1) $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$ и не меняют знак на отрезке изоляции $[a; b]$ (не меняется тип монотонности и направление выпуклости); 2) начальное приближение x_0 из отрезка изоляции выбрано так, что $f(x_0)f''(x_0) > 0$ (это гарантирует, что последующие приближения $x_1, x_2, \dots$ будут принадлежать отрезку изоляции). Хотя на практике эти условия обычно не проверяют, но следует помнить, что их нарушение может не принести успеха в вычислении корня. Например, если за начальное приближение для функции на рис.5.11 выбрать правый конец отрезка, то соответствующая касательная пересечёт ось абсцисс в точке a_1 , в которой функция, возможно, и не определена.

Оценить точность вычисления корня по методу Ньютона можно по формуле:

$$|x_n - \gamma| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad (5.5)$$

где $m = \min |f'(x)|$ на отрезке $[a; b]$. При практических вычислениях считают (хотя в общем случае такое заключение может быть неверным), что требуемая точность достигнута, если совпадает соответствующее число первых знаков после запятой у x_n и x_{n-1} .

Пример 5.6. Найти приближённо с точностью не менее 0,01 корень уравнения $x^3 + 2x - 4 = 0$.

◀1) В качестве отрезка изоляции возьмём $[1; 2]$ (см. пример 5.5). На нём $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$, $f''(x) = 6x > 0$.

2) За начальное приближение берём $x_0 = 2$, чтобы знак функции в точке начального приближения совпал со знаком второй производной.

3) Находим по формуле (5.4) первое приближение корня $x_1 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{8}{14} \approx 1,4$. По формуле (5.5) оцениваем точность вы-

числения корня: $|x_1 - \gamma| \leq \frac{|f(x_1)|}{5} = 0,3... - \text{не достигнута.}$

4) Повторяем вычисления $x_2 = 1,4 - \frac{f(1,4)}{f'(1,4)} \approx 1,2$, $|x_2 - \gamma| \leq 0,02...;$

$x_3 \approx 1,18$, $|x_3 - \gamma| \leq 0,0006... - \text{точность достигнута. И так, } \gamma = 1,18 \text{ с точностью не менее } 0,01. \blacktriangleright$

Замечание. Для уравнения из примера 5.6 метод деления отрезка пополам обеспечивает точность не менее 0,01 на шестом шаге. По методу касательных – уже на третьем. На следующем, четвёртом, шаге метод касательных обеспечит точность вычисления корня не менее 10^{-6} , а по методу деления отрезка пополам нужно было бы сделать не менее 19 шагов.

6. Неопределённый интеграл

6.1. Понятие неопределённого интеграла и его свойства

В разделе 2 было введено понятие производной. С физической точки зрения нахождение производной – это вычисление скорости $v(t)$ движения тела, если известна зависимость $s(t)$ пути от времени. Естественно рассмотреть обратную задачу: зная $v(t)$, найти $s(t)$. Эта задача приводит к понятию интеграла.

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, если $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in (a; b)$.

Замечание. Очевидно, что понятие первообразной можно ввести для отрезка, если на его концах рассматривать односторонние производные. Понятие первообразной легко вводится и для объединения промежутков.

Нетрудно привести примеры первообразных для многих конкретных функций. Например, $F(x) = x^5$ будет первообразной для $f(x) = 5x^4$, так как $(x^5)' = 5x^4$.

Легко заметить, что первообразная от функции, если она существует, не определяется однозначно. Так, дифференцируя, получаем, что для $f(x) = 5x^4$ первообразными будут функции: $F(x) = x^5 + 1$, $F(x) = x^5 - \sqrt{2}$ и т.п. Если для функции $f(x)$ найдена хоть одна первообразная $F(x)$, то любая функция вида $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, также является первообразной для $f(x)$. Данный вывод следует из того, что производная суммы равна сумме производных и производная постоянной функции равна нулю. Верно и обратное утверждение.

Теорема 6.1. Если функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются первообразными функции $f(x)$ на некотором промежутке, то их разность равна постоянному числу на этом промежутке.

◀ Пусть $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Тогда $\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$ на заданном промежутке. Но из равенства нулю производной функции на промежутке следует, что функция есть постоянная на нём (см. теорему 5.1). ▶

Таким образом, если для функции $f(x)$ найдена хоть одна первообразная $F(x)$, то любая другая её первообразная может быть записана в виде $F(x) + C$, где C – постоянная.

Произвольную первообразную функции называют *неопределённым интегралом* и обозначают $\int f(x)dx$. Выражение $f(x)dx$ называют *подынтегральным выражением*, функцию $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, знак $\int$ – *знаком интеграла*.

Итак, в силу определения

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$; C – постоянная, на которую первообразная слева отличается от первообразной $F(x)$. Например, $\int 5x^4 dx = x^5 + C$.

Из определения неопределённого интеграла сразу же получаем свойство

1°. Производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции: $\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$.

Так как дифференциал функции равен произведению производной функции на дифференциал аргумента, то верны свойства:

2°. Дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению: $d\left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx$.

3°. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:
 $\int dF(x) = F(x) + C$.

Дифференцируя левые части написанных ниже равенств, получаем *линейные свойства неопределённого интеграла*:

4°. $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx + C$, где α – произвольное число.

5°. $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx + C$.

Коротко свойства 4° и 5° формулируют так: *постоянный множитель можно выносить за знак неопределённого интеграла* и, соответственно, *неопределённый интеграл от суммы функций равен сумме неопределённых интегралов*.

Далее, для сокращения записей, мы не будем писать слагаемое C , если в левой и правой частях некоторого равенства есть знаки интеграла.

6°. Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$,

$a \neq 0$.

◀Имеем по условию $F'(x) = f(x)$. Тогда, по правилам дифференцирования, $\left(\frac{1}{a} F(ax+b) \right)' = \frac{1}{a} f(ax+b) \cdot a = f(ax+b)$. ▶

Пример 6.1. Вычислить $\int (2x+9)^4 dx$.

◀ $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$. Значит, по свойству 6°, $\int (2x+9)^4 dx = \frac{(2x+9)^5}{5} + C$. ▶

Операцию нахождения неопределённого интеграла называют *интегрированием*. Свойства 1° и 2° показывают, что дифференцирование и интегрирование можно рассматривать как взаимно-обратные операции.

Функцию, имеющую первообразную (неопределённый интеграл), называют *интегрируемой*.

Теперь отметим следующее. Производная элементарной функции всегда есть элементарная функция. Однако существуют элементарные

функции, например, $\frac{\sin x}{x}$, e^{-x^2} , $\frac{x}{\ln x}$ и другие, для которых невоз-

можно найти первообразную, являющуюся элементарной функцией. В связи с этим естествен вопрос: для всякой ли, хотя бы элементарной функции, существует первообразная? Справедлив следующий фундаментальный факт, который в данном пособии не доказывается: *всякая непрерывная на промежутке функция имеет на нём первообразную*.

В частности, вышеприведённые функции $\frac{\sin x}{x}$, e^{-x^2} , $\frac{x}{\ln x}$ имеют первообразные на промежутках, на которых они непрерывны. Известно, что их первообразные можно записать в виде *бесконечной суммы* степенных функций, но нельзя записать в виде *конечной комбинации* основных элементарных функций.

6.2. Таблица основных неопределённых интегралов

Из формул для производных основных элементарных функций следует:

$$1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$$

$$2. \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

$$3. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$4. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$5. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C.$$

$$6. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$7. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \text{ в частности, } \int e^x dx = e^x + C.$$

$$8. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0, \quad \text{в частности, } \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a > 0, \quad \text{в частности, } \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$$

$$10. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$11. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

$$12. \int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C.$$

$$13. \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C.$$

В таблицу неопределённых интегралов обычно включают формулы:

$$14. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, \quad a \neq 0.$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C, \quad a \neq 0.$$

Справедливость последних формул легко устанавливается дифференцированием. Например, докажем формулу 14. Если $\frac{a+x}{a-x} > 0$, то

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| \right)' &= \frac{1}{2a} \left(\ln \frac{a+x}{a-x} \right)' = \frac{1}{2a} \cdot \frac{a-x}{a+x} \cdot \frac{(a-x) - (a+x) \cdot (-1)}{(a-x)^2} = \\ &= \frac{1}{a^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Аналогично, если $\frac{a+x}{a-x} < 0$, то

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| \right)' &= \frac{1}{2a} \left(\ln \left(-\frac{a+x}{a-x} \right) \right)' = \\ &= -\frac{1}{2a} \cdot \frac{a-x}{a+x} \cdot \left(-\frac{(a-x) + (a+x)}{(a-x)^2} \right) = \frac{1}{a^2 - x^2}. \end{aligned}$$

6.3. Методы интегрирования

Интегрирование даже несложных функций требует большего искусства, чем дифференцирование. Например, функции $\sqrt{1-x^2}$ и $x \sin x$ нетрудно продифференцировать, но вычислить интегралы $\int \sqrt{1-x^2} dx$ и $\int x \sin x dx$ непросто. Ниже рассматриваются два эффективных, часто применяемых приёма интегрирования.

1. Метод замены переменной (метод подстановки)

Теорема 6.2. Пусть функции $f(t)$, $t = \varphi(x)$, $\varphi'(x)$ непрерывны и известно, что $\int f(t) dt = F(t) + C$. Тогда

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C. \quad (6.1)$$

Замечания. 1) Формулу (6.1) часто записывают в виде $\int f(\varphi(x))d\varphi(x) = \int f(t)dt$, подразумевая, что после вычисления интеграла справа вместо переменной t будет подставлено выражение $\varphi(x)$. 2) В теореме, естественно, предполагается, что переменная $t = \varphi(x)$ принадлежит области непрерывности функции $f(t)$. 3) Функцию, имеющую непрерывную производную, называют *непрерывно дифференцируемой*.

◀ По условию $F'_t = f(t)$. Значит, по правилу дифференцирования сложной функции:

$$(F(\varphi(x)))'_x = F'_t \cdot \varphi'(x) = f(t)\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Таким образом, функция $F(\varphi(x))$ является первообразной для функции $f(\varphi(x))\varphi'(x)$, что и доказывает равенство (6.1). ►

Отметим, что свойство 6° неопределённого интеграла (см. подразд. 6.1) является частным случаем формулы (6.1).

Пример 6.2. Вычислить $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

◀ Сделаем замену $x = e^t$. Тогда

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{\ln e^t}{e^t} de^t = \int \frac{te^t}{e^t} dt = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C.$$

Подставив обратную к $x = e^t$ функцию $t = \ln x$, получим:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C. \blacktriangleright$$

В ряде случаев метод подстановки для вычисления интегралов $\int f(x)dx$ применяют в иной форме, называемой *подведением под знак дифференциала*. Пусть подынтегральное выражение $f(x)dx$ удалось представить в виде $g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = g(\varphi(x))d\varphi(x)$, где $g(t)$ – более удобная для интегрирования функция. Если $\int g(t)dt = G(t) + C$, то $\int f(x)dx = G(\varphi(x)) + C$. Отметим, что способ подведения под знак дифференциала не требует нахождения обратной функции при возвращении к исходной переменной.

Например, записывая в примере 6.2 выражение $\frac{\ln x}{x}dx$ в виде $\ln x d \ln x$ («подвели» $1/x$ под знак дифференциала), найдём:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d \ln x = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

Проиллюстрируем указанный способ ещё на одном примере.

Пример 6.3. Вычислить $\int \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} dx$.

◀ Заметив, что $-\sin x = (\cos x)'$, внесём $\sin x$ под знак дифференциала:

$$\int \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} dx = -2 \int \frac{d \cos x}{\cos^3 x} = -2 \int \frac{dt}{t^3} = -2 \int t^{-3} dt = t^{-2} + C = \frac{1}{\cos^2 x} + C.$$

Если выражение $\frac{2 \sin x}{\cos^3 x} dx$ записать в виде $2 \operatorname{tg} x \frac{dx}{\cos^2 x} = 2 \operatorname{tg} x d \operatorname{tg} x$, то получим

$$\int \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} dx = \int 2 \operatorname{tg} x d \operatorname{tg} x = \int 2t dt = t^2 + C = \operatorname{tg}^2 x + C.$$

Хотя полученные ответы для одного и того же интеграла являются различными по виду, но оба они правильные. Дело в том, что

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Поэтому одну и ту же первообразную можно получить, прибавляя к $\operatorname{tg}^2 x$ и, соответственно, к $1/\cos^2 x$ постоянные, отличающиеся на единицу. ►

Пример 6.4. Вычислить $\int \sqrt{1-x^2} dx$.

◀ В данном примере не видно выражения, которое можно было бы подвести под знак дифференциала. Сделаем подстановку $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ с целью избавления от радикала в подынтегральном выражении

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt.$$

Используя формулу $1 + \cos 2t = 2\cos^2 t$, понизим степень подынтегрального выражения:

$$\int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \int \cos 2t dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t + C. \quad (6.2)$$

Для перехода к переменной x подставим $t = \arcsin x$ справа в равенстве (6.2) и учтём, что $\sin 2t = 2 \sin t \cdot \cos t = 2 \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} = 2x \sqrt{1 - x^2}$. Окончательно

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t + C = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + C. \quad \blacktriangleright$$

Замечание. Аналогично, выполняя подстановку $x = a \sin t$, получим:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

2. Метод интегрирования по частям

Теорема 6.3. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы, то $\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$, или, коротко,

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (6.3)$$

Замечание. Формулу (6.3) называют формулой *интегрирования по частям*.

◀ По правилу дифференцирования произведения имеем $d(uv) = vdu + u dv$. Отсюда $u dv = d(uv) - vdu$ и, по определению и свойствам неопределённого интеграла, получаем $\int u dv = \int d(uv) - \int v du$ или $\int u dv = uv - \int v du$. ▶

При применении формулы интегрирования по частям стремятся подынтегральное выражение представить в виде такого произведения функции $u(x)$ и дифференциала $dv(x)$, что вычисление *двух* интегралов $\int dv$ и $\int v du$ является в совокупности более простой задачей, чем нахождение непосредственно первообразной для $f(x)$.

Пример 6.5. Вычислить $\int x \sin x dx$.

◀ Подынтегральное выражение $x \sin x dx$ представим в виде произведения функции $u = x$ и дифференциала $dv = \sin x dx$. Тогда $du = dx$ и $v = -\cos x$ (заметим, что при использовании формулы интегрирования по частям достаточно выписать какую-нибудь одну функцию v , а не общее выражение первообразной для $\sin x dx$). Следовательно, по формуле (6.3)

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C. \quad \blacktriangleright$$

Если в примере 6.5 выбрать $u = \sin x$ и $dv = x dx$, то $du = \cos x dx$, $v = \frac{x^2}{2}$ и $\int x \sin x dx = \frac{x^2}{2} \sin x - \frac{1}{2} \int x^2 \cos x dx$. Интеграл в правой части последней формулы является более сложным, чем исходный. Это говорит о том, что выбор $u = \sin x$ и $dv = x dx$ в данном случае является неудачным.

Для интегралов вида $\int x^n \sin \alpha x dx$, $\int x^n \cos \alpha x dx$, $\int x^n e^{\alpha x} dx$ (n – натуральное число) к успеху ведёт выбор x^n в качестве u . При этом формула интегрирования по частям может применяться неоднократно.

Пример 6.6. Вычислить $\int x^2 e^x dx$.

◀ Пусть $u = x^2$, $dv = e^x dx$. Тогда $du = 2x dx$, $v = e^x$ и $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$. К интегралу в правой части ещё раз применим формулу интегрирования по частям, полагая $u = x$, $dv = e^x dx$: $2 \int x e^x dx = 2x e^x - 2 \int e^x dx = 2x e^x - 2e^x + C$. Таким образом, окончательно

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = e^x (x^2 - 2x + 2) + C. \blacktriangleright$$

Рассмотрим ещё один поучительный пример использования интегрирования по частям.

Пример 6.7. Вычислить $\int e^x \cos x dx$.

◀ Пусть $u = e^x$, $dv = \cos x dx$. Тогда $du = e^x dx$, $v = \sin x$ и

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx. \quad (6.4)$$

К интегралу в правой части (6.4) ещё раз применим формулу (6.3), полагая $u = e^x$, а $dv = \sin x dx$: $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$. Подставим последнее выражение в правую часть (6.4)

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$$

Полученное равенство является уравнением относительно интеграла $\int e^x \cos x dx$. Решая его, находим

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} (e^x \sin x + e^x \cos x) + C. \blacktriangleright$$

6.4. Интегрирование рациональных дробей

В рассмотренных выше примерах каждый интеграл вычислялся некоторым особым способом. Вместе с тем желательно хотя бы для каких-то классов функций предложить алгоритмы, позволяющие вычислить неопределённый интеграл от любой функции класса.

Наиболее простым для интегрирования и достаточно широким классом функций является класс *многочленов* $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$: интеграл от любого многочлена сводится к сумме интегралов вида $\int x^k dx$.

Другим важным случаем является класс *рациональных дробей*, т.е. функций вида $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно. Если $n \geq m$, то рациональную дробь называют *неправильной*, если $n < m$ – *правильной*. Если дробь неправильная, то её можно представить, выполняя, например, деление многочленов «уголком» (см. пример 6.13), в виде суммы многочлена и правильной дроби: $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = T_{n-m}(x) + \frac{U_l(x)}{Q_m(x)}$, где $T_{n-m}(x)$ – многочлен степени $n-m$, а $U_l(x)$ – многочлен степени $l < m$. Интегрирование многочлена не вызывает трудностей. Значит, достаточно иметь алгоритм интегрирования правильной дроби.

1. Простейшие дроби и их интегрирование

Следующие виды рациональных дробей называют *простейшими*:

- I. $\frac{1}{x-a}$; II. $\frac{1}{(x-a)^k}$, $k \geq 2$ – натуральное число;
- III. $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$; IV. $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}$, $k \geq 2$ – натуральное число.

Для дробей III и IV типа предполагается, что квадратный трёхчлен в знаменателе не имеет действительных корней.

Интегрирование дробей I и II типа не вызывает сложностей:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \ln|x-a| + C ;$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int (x-a)^{-k} dx = -\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C .$$

Способ интегрирования дроби III типа покажем на примерах.

Пример 6.8. Найти: а) $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$; б) $\int \frac{2x+6}{x^2+6x+13} dx$;

в) $\int \frac{3x+2}{x^2+6x+13} dx .$

◀а) Выделим полный квадрат в знаменателе дроби

$$x^2+6x+13 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 + 4 = (x+3)^2 + 4 .$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+13} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+4} = \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} + C .$$

б) Заметим, что $2x+6 = (x^2+6x+13)'$. Поэтому, подводя выражение $2x+6$ под знак дифференциала, найдём:

$$\int \frac{2x+6}{x^2+6x+13} dx = \int \frac{d(x^2+6x+13)}{x^2+6x+13} = \ln(x^2+6x+13) + C .$$

в) Вычисление данного интеграла сведём к интегралам вида а) и б) следующим образом. Для того чтобы использовать способ подведения под знак дифференциала, в числителе дроби необходимо вместо выражения $3x+2$ иметь выражение $2x+6$:

$$3x+2 = \frac{3}{2} \left(2x + \frac{4}{3} \right) = \frac{3}{2} \left(2x+6-6+\frac{4}{3} \right) = \frac{3}{2} \left(2x+6-\frac{14}{3} \right) = \frac{3}{2} (2x+6) - 7 .$$

Теперь

$$\int \frac{3x+2}{x^2+6x+13} dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+6)-7}{x^2+6x+13} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+6}{x^2+6x+13} dx -$$

$$-7 \int \frac{1}{x^2 + 6x + 13} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2 + 6x + 13) - \frac{7}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} + C. \blacktriangleright$$

Сделаем замену $t = x + p/2$, дробь IV типа запишем в виде

$$\frac{at + d}{(t^2 + m^2)^k}. \text{ Если } a \neq 0, \text{ то}$$

$$\int \frac{at}{(t^2 + m^2)^k} dt = \frac{a}{2} \int \frac{d(t^2 + m^2)}{(t^2 + m^2)^k} = \frac{a}{2(-k+1)} (t^2 + m^2)^{-k+1} + C.$$

Следовательно, вся трудность интегрирования дроби IV типа заключается в умении вычислять интеграл $J_k = \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^k}$ для любого $k \geq 2$.

Применяя интегрирование по частям, можно доказать следующую *рекуррентную формулу*:

$$J_{k+1} = \frac{1}{2km^2} \frac{t}{(t^2 + m^2)^k} + \frac{2k-1}{2km^2} J_k, \quad k \geq 1, \quad (6.5)$$

сводящую вычисление интеграла J_{k+1} к вычислению интеграла с индексом на единицу меньше. Зная табличный интеграл $J_1 = \int \frac{dt}{t^2 + m^2}$ и применяя последовательно нужное число раз формулу (6.5), найдём J_k для любого $k \geq 2$.

2. Разложение правильных дробей на простейшие дроби

Интегрирование рациональных дробей основано на следующем фундаментальном факте: *любую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы конечного числа простейших дробей*. В данной книге не доказывается это утверждение в общем случае. Для конкретных дробей справедливость его проверяется предъявлением такого разложения. Продемонстрируем на примерах алгоритм разложения правильной дроби на сумму простейших, называемый *методом неопределённых коэффициентов*.

Пример 6.9. Разложить $\frac{2x^2 + x + 9}{(x^2 - 1)(x + 1)}$ на простейшие дроби.

◀1. Разложим знаменатель дроби на произведение *линейных множителей* $(x^2 - 1)(x + 1) = (x + 1)(x - 1)(x + 1) = (x + 1)^2(x - 1)$.

2. По разложению знаменателя на множители определяем вид простейших дробей и количество слагаемых в разложении:

$$\frac{2x^2 + x + 9}{(x^2 - 1)(x + 1)} = \frac{2x^2 + x + 9}{(x + 1)^2(x - 1)} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{(x + 1)^2} + \frac{c}{x - 1}, \quad (6.6)$$

где коэффициенты a , b , c пока не определены.

Замечание. Обратим внимание на то, что кратный линейный множитель $(x + 1)^2$ порождает в разложении *два* слагаемых: $\frac{a}{x + 1}$ и

$\frac{b}{(x + 1)^2}$. Если бы разложение знаменателя содержало кратный множи-

тель вида $(x + 1)^3$, то он породил бы *три* слагаемых: $\frac{a}{x + 1}$, $\frac{b}{(x + 1)^2}$ и

$\frac{d}{(x + 1)^3}$.

3. Для нахождения коэффициентов разложения приведём дроби в правой части (6.6) к общему знаменателю. Получим слева и справа две дроби с *одинаковыми* знаменателями. Эти две дроби будут равны, если будут равны их числители:

$$2x^2 + x + 9 = a(x + 1)(x - 1) + b(x - 1) + c(x + 1)^2, \quad (6.7)$$

или, раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые,

$$2x^2 + x + 9 = (a + c)x^2 + (b + 2c)x + (-a - b + c).$$

4. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем систему *линейных* уравнений для нахождения a , b , c :

$$\begin{aligned} a + c &= 2; \\ b + 2c &= 1; \\ -a - b + c &= 9. \end{aligned}$$

Решая её, найдём: $a = -1$, $b = -5$, $c = 3$. Итак,

$$\frac{2x^2 + x + 9}{(x^2 - 1)(x + 1)} = -\frac{1}{x + 1} - \frac{5}{(x + 1)^2} + \frac{3}{x - 1}. \blacktriangleright \quad (6.8)$$

Пример 6.10. Разложить $\frac{2x^3 + x + 5}{x^4 - 1}$ на простейшие дроби.

◀1. Разложим знаменатель дроби на произведение линейных и квадратичных множителей $x^4 - 1 = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$ (в разложении квадратный трёхчлен не должен иметь действительных корней, иначе его можно было бы разложить на произведение линейных множителей).

2. По разложению знаменателя на множители определяем вид простейших дробей и количество слагаемых в разложении:

$$\frac{2x^3 + x + 5}{x^4 - 1} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x - 1} + \frac{cx + d}{x^2 + 1}, \quad (6.9)$$

где коэффициенты a, b, c, d пока не определены.

Замечание. Обратим внимание на то, что если бы в разложении знаменателя присутствовал кратный квадратичный множитель $(x^2 + 1)^2$, то в разложении дроби на простейшие нужно было бы написать два слагаемых:

$$\frac{cx + d}{x^2 + 1} \text{ и } \frac{ex + f}{(x^2 + 1)^2}.$$

3. Для нахождения коэффициентов разложения приведём, как и выше, дроби в правой части (6.9) к общему знаменателю и приравняем числители:

$$2x^3 + x + 5 = a(x - 1)(x^2 + 1) + b(x + 1)(x^2 + 1) + (cx + d)(x^2 - 1),$$

или, раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые,

$$2x^3 + x + 5 = (a + b + c)x^3 + (-a + b + d)x^2 + (a + b - c)x + (-a + b - d).$$

4. Составляем систему:

$$a + b + c = 2; \quad -a + b + d = 0; \quad a + b - c = 1; \quad -a + b - d = 5.$$

Решая её, найдём: $a = -1/2$; $b = 2$; $c = 1/2$; $d = -5/2$. Итак,

$$\frac{2x^3 + x + 5}{x^4 - 1} = -\frac{1}{2(x + 1)} + \frac{2}{x - 1} + \frac{x - 5}{2(x^2 + 1)}. \blacktriangleright \quad (6.10)$$

Замечание. Для упрощения нахождения всех или хотя бы части коэффициентов разложения в примерах 6.9, 6.10 можно использовать

приём, который покажем на примере 6.9. Равенство (6.7) должно выполняться при всех значениях x . При $x=1$ оно примет вид $12=4c$ (два других слагаемых справа в (6.7) обращаются в нуль). Отсюда, $c=3$. Аналогично, взяв $x=-1$, получим $10=-2b$ и $b=-5$. Для нахождения последнего коэффициента a теперь будет достаточно составить и решить *лишь одно уравнение*, содержащее a .

3. Интегрирование рациональных дробей

Интеграл от правильной рациональной дроби нетрудно вычислить, если мы знаем её разложение на простейшие дроби.

Пример 6.11. Вычислить $\int \frac{2x^2 + x + 9}{(x^2 - 1)(x + 1)} dx$.

◀Подынтегральная функция есть правильная рациональная дробь.

Её разложение на простейшие дроби: $\frac{2x^2 + x + 9}{(x^2 - 1)(x + 1)} =$
 $= -\frac{1}{x + 1} - \frac{5}{(x + 1)^2} + \frac{3}{x - 1}$ (см. (6.8)). Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + x + 9}{(x^2 - 1)(x + 1)} dx &= -\int \frac{dx}{x + 1} - 5 \int \frac{dx}{(x + 1)^2} + 3 \int \frac{dx}{x - 1} = \\ &= -\ln|x + 1| + \frac{5}{x + 1} + 3 \ln|x - 1| + C = \frac{5}{x + 1} + \ln \frac{|x - 1|^3}{|x + 1|} + C. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Пример 6.12. Вычислить $\int \frac{x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 3}{x^4 - 1} dx$.

◀Здесь подынтегральная функция – неправильная дробь. Поэтому выделяем сначала частное и остаток от деления многочлена $x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 3$ на $x^4 - 1$:

$$\begin{array}{r}
 \frac{x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 3}{x^5 - x} \quad \left| \frac{x^4 - 1}{x + 2} \right. \\
 \hline
 \frac{2x^4 + 2x^3 + x + 3}{2x^4 - 2} \\
 \hline
 \frac{2x^4 - 2}{2x^3 + x + 5}
 \end{array}$$

Таким образом, $\frac{x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 3}{x^4 - 1} = x + 2 + \frac{2x^3 + x + 5}{x^4 - 1}$ и

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 3}{x^4 - 1} dx &= \int (x + 2) dx + \int \frac{2x^3 + x + 5}{x^4 - 1} dx = \\
 &= \frac{x^2}{2} + 2x + \int \frac{2x^3 + x + 5}{x^4 - 1} dx.
 \end{aligned}$$

Используя разложение (6.10) для дроби $\frac{2x^3 + x + 5}{x^4 - 1}$, находим:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2x^3 + x + 5}{x^4 - 1} dx &= -\int \frac{dx}{2(x+1)} + \int \frac{2dx}{x-1} + \int \frac{x-5}{2(x^2+1)} dx = \\
 &= -\frac{1}{2} \ln|x+1| + 2 \ln|x-1| + \frac{1}{2} \int \frac{x}{x^2+1} dx - \frac{5}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \\
 &= -\frac{1}{2} \ln|x+1| + 2 \ln|x-1| + \frac{1}{4} \ln|x^2+1| - \frac{5}{2} \operatorname{arctg} x + C.
 \end{aligned}$$

Окончательно

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 3}{x^4 - 1} dx &= \\
 &= \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{1}{4} \ln \frac{(x-1)^4 (x^2+1)}{(x+1)} - \frac{5}{2} \operatorname{arctg} x + C. \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

6.5. Интегрирование иррациональных и тригонометрических выражений

К интегрированию рациональных дробей может быть сведено интегрирование ряда тригонометрических и иррациональных функций.

Рассмотрим интеграл вида $\int R(\cos x, \sin x) dx$, где R означает рациональную функцию от аргументов $\cos x$ и $\sin x$, т.е. над величинами $\cos x$ и $\sin x$ выполняются только арифметические операции. Данный интеграл с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ всегда сводится к вычислению интеграла от рациональной дроби.

Действительно, используя формулы половинного угла и основное тригонометрическое тождество, выразим $\cos x$ и $\sin x$ через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, а значит, и через t :

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)}{\cos^2 \frac{x}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \quad (6.11)$$

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} \cdot 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1 + t^2}. \quad (6.12)$$

Далее, из равенства $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ находим

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \quad (6.13)$$

Следовательно, $\int R(\cos x, \sin x) dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$. Подынтегральная функция в последнем интеграле является рациональной, так как над переменной t выполняются только арифметические операции.

Пример 6.13. Вычислить $\int \frac{dx}{3 + \cos x + \sin x}$.

◀Сделаем подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Используя формулы (6.11)–(6.13), после очевидных преобразований получаем:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 + \cos x + \sin x} &= \int \frac{dt}{t^2 + t + 2} = \int \frac{dt}{(t+1/2)^2 + 7/4} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{t+1/2}{\sqrt{7}/2} + C = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{7}} + C. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Универсальная тригонометрическая подстановка сводит любой интеграл вида $\int R(\cos x, \sin x) dx$ к интегрированию рациональной дроби. Однако в числителе или знаменателе дроби могут получаться многочлены от t высокой степени. В ряде случаев интегрирование проще выполнить без использования универсальной подстановки.

Пример 6.14. Вычислить $\int \sin^3 x dx$.

◀Запишем функцию $\sin^3 x$ в виде $(1 - \cos^2 x) \sin x$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x dx &= \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx = - \int (1 - \cos^2 x) d \cos x = \\ &= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C. \blacktriangleright \end{aligned}$$

В заключение данного пункта отметим способ вычисления интегралов от произведений вида $\cos \alpha x \sin \beta x$, $\cos \alpha x \cos \beta x$, $\sin \alpha x \sin \beta x$.

Пример 6.15. Вычислить $\int \cos 4x \cos 5x dx$.

◀Преобразуя произведение тригонометрических функций в сумму, находим:

$$\int \cos 4x \cos 5x dx = \frac{1}{2} \int (\cos x + \cos 9x) dx = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{18} \sin 9x + C. \blacktriangleright$$

6.6. Интегрирование дробно-линейных и квадратичных иррациональностей

1. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей

Рассмотрим интеграл $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, где $R(u, v)$ – рациональная функция. Его называют интегралом от *дробно-линейной иррациональности*. Он всегда сводится к интегралу от рациональной дроби. Покажем на примере.

Пример 6.16. Вычислить $\int \frac{1}{1+x} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$.

◀Полагаем $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Тогда $t^2 = \frac{1-x}{1+x}$, $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = -\frac{4tdt}{(1+t^2)^2}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+x} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx &= \int \frac{1+t^2}{2} \cdot t \cdot \frac{-4tdt}{(1+t^2)^2} = -2 \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = -2 \int \frac{t^2+1-1}{1+t^2} dt = \\ &= -2 \int dt + 2 \int \frac{dt}{1+t^2} = -2t + 2 \operatorname{arctg} t + C = -2 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Если задан интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, где R – рациональная функция, то он сводится к интегралу от рациональной дроби с помощью подстановки $\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, где k – наименьшее общее кратное чисел n и m .

2. Интегрирование квадратичных иррациональностей

Функцию вида $R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$ называют *квадратичной иррациональностью*. Для вычисления интеграла $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$ в общем случае можно рекомендовать следующий способ.

Сначала выделяем полный квадрат в квадратном трёхчлене под знаком радикала: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$. Далее выпол-

няем *линейную* подстановку $t = x + \frac{b}{2a}$ и выносим за знак радикала a , если $a > 0$, и $-a$, если $a < 0$. В итоге получим один из следующих интегралов:

$$1) \int R\left(t, \sqrt{d^2 - t^2}\right) dt; \quad 2) \int R\left(t, \sqrt{d^2 + t^2}\right) dt;$$

$$3) \int R\left(t, \sqrt{t^2 - d^2}\right) dt.$$

Эти интегралы в свою очередь сводятся к интегралам $\int R(\cos u, \sin u) du$ с помощью замен $t = d \sin u$ (в случае 1), $t = d \operatorname{tg} u$

(в случае 2), $t = \frac{d}{\sin u}$ (в случае 3).

Пример 6.17. Вычислить $\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx$.

◀ Положим $x = \frac{1}{\sin u}$. Тогда $dx = -\frac{\cos u}{\sin^2 u} du$, $\sqrt{x^2 - 1} = \frac{\cos u}{\sin u}$ и

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx &= - \int \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u} du = - \int \frac{1 - \sin^2 u}{\sin^2 u} du = \\ &= - \int \frac{du}{\sin^2 u} + \int du = \operatorname{ctg} u + u + C. \end{aligned}$$

Выполним обратную замену $u = \arcsin \frac{1}{x}$ и учтём, что $\operatorname{ctg} u = \frac{\cos u}{\sin u} = \sqrt{x^2 - 1}$:

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx = \sqrt{x^2 - 1} + \arcsin \frac{1}{x} + C. \blacktriangleright$$

Заметим, что для вычисления интегралов $\int R(t, \sqrt{d^2 + t^2}) dt$ и $\int R(t, \sqrt{t^2 - d^2}) dt$ можно использовать замены: $t = d \operatorname{sh} u$ для первого интеграла и $t = d \operatorname{ch} u$ – для второго. Применение указанных подстановок позволяет в силу равенства $\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1$ (см. формулу (3.10)) избавиться от иррациональности под знаком интеграла и свести вычисление исходных интегралов к интегралам вида $\int R(\operatorname{ch} u, \operatorname{sh} u) du$. Для вычисления этих интегралов можно применять приёмы, аналогичные приёмам для нахождения интегралов $\int R(\cos u, \sin u) du$, но уже с использованием свойств гиперболических функций.

7. Определённый интеграл

7.1. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции

Определённый интеграл является мощным математическим инструментом для вычисления таких геометрических и физических величин, как площадь фигуры, объём тела, длина кривой, центр тяжести и момент инерции тела и т.д. Само понятие определённого интеграла и возникло в связи с задачей вычисления указанных геометрических и физических величин.

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана непрерывная функция $f(x) > 0$. Рассмотрим фигуру, называемую *криволинейной трапецией*, ограниченную линиями: графиком функции $y = f(x)$, вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox (рис.7.1). Требуется найти её площадь S .

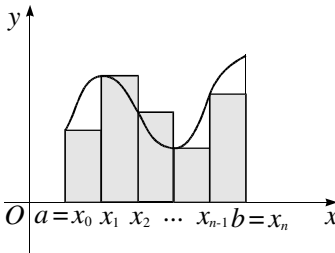


Рис.7.1.

Естественное решение этой задачи состоит в том, чтобы криволинейную фигуру приближать более простыми фигурами, площадь которых легко вычисляется. Для этого разделим отрезок $[a; b]$ на n равных частей

точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Проведём вертикальные прямые $x = x_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, которые разобьют фигуру на n узких полосок, каждая из которых также является криволинейной трапецией. Теперь заменим приближённо каждую узкую полоску на прямоугольник с высотой, совпадающей с одной из вертикальных сторон полоски, например, всегда левой. Получим *ступенчатую* фигуру (см. рис.7.1), составленную из n прямоугольников, площадь которой будет *приближением* площади трапеции.

Площадь ступенчатой фигуры равняется сумме площадей отдельных прямоугольников. Длина основания i -го прямоугольника,

$i=0, 1, 2, \dots, n-1$, равна разности $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, а высота равна $f(x_i)$. Следовательно, площадь i -го прямоугольника равна $f(x_i)\Delta x_i$,

а площадь всей ступенчатой фигуры $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$. Если увеличи-

вать n , то полоски будут становиться всё уже, а погрешность приближения вычисления площади S трапеции будет стремиться к нулю. Перейдя к пределу, получим точное значение площади:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i. \quad (7.1)$$

К вычислению аналогичных пределов приводят многие другие задачи (см. раздел 8). Поэтому целесообразно отвлечься от решения отдельных задач и построить сначала общую теорию пределов вида (7.1), а затем применить её к решению конкретных задач.

7.2. Понятие определённого интеграла

1. Определение определённого интеграла

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана функция $f(x)$. Разобьём его на части произвольным образом точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Множество $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ называют *разбиением* отрезка. Отметим, что концы отрезка всегда входят в разбиение. Разности $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i=0, 1, 2, \dots, n-1$, есть длины частичных отрезков $[x_i; x_{i+1}]$. Наибольшую длину частичных отрезков для разбиения T обозначим λ_T и будем называть *мелкостью* (диаметром) разбиения. Выберем в каждом частичном отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ произвольную точку γ_i и составим сумму

$$\begin{aligned} S_T = S_T(f) &= f(\gamma_0)\Delta x_0 + f(\gamma_1)\Delta x_1 + \dots + f(\gamma_{n-1})\Delta x_{n-1} = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f(\gamma_i)\Delta x_i, \end{aligned} \quad (7.2)$$

называемую *интегральной суммой функции f* (более точно: *интегральной суммой функции $f(x)$ для данного разбиения T и выбора точек γ_i*).

Определение. Число I называется *определённым интегралом от функции f на отрезке $[a; b]$* , если для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что для любого разбиения T с мелкостью разбиения $\lambda_T < \delta$ выполняется неравенство

$$|S_T - I| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\gamma_i) \Delta x_i - I \right| < \varepsilon \quad (7.3)$$

при любом выборе точек γ_i .

Обозначается определённый интеграл символом $\int_a^b f(x)dx$. Число a называется *нижним пределом* интеграла, число b – *верхним пределом* интеграла.

Данное выше определение коротко записывают так: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda_T \rightarrow 0} S_T$.

Функцию, для которой существует определённый интеграл, называют *интегрируемой по Риману** на данном отрезке или, коротко, *интегрируемой*.

Сравнивая определение интеграла и приведённый выше способ вычисления площади криволинейной трапеции, заключаем, что в случае *неотрицательной интегрируемой функции $f(x)$ определённый интеграл равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox* . В этом состоит *геометрический смысл определённого интеграла*.

2. Необходимое условие интегрируемости

Теорема 7.1. Если функция интегрируема на отрезке, то она ограничена на нём.

* Риман Бернхард (1826–1866) – немецкий математик.

◀Предположим противное. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$, но не ограничена на нём. Пусть T – разбиение отрезка с мелкостью разбиения меньше произвольного числа $\delta > 0$. Из неограниченности функции на всём отрезке следует её неограниченность хотя бы на одном частичном отрезке $[x_k; x_{k+1}]$. Зафиксируем выбор точек $\gamma_i \in [x_i; x_{i+1}]$ для всех $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, кроме $i = k$. Тогда в интегральной сумме (7.2) все слагаемые будут фиксированными числами, кроме слагаемого $f(\gamma_k)\Delta x_k$, которое, в силу неограниченности функции на $[x_k; x_{k+1}]$, может быть сделано сколь угодно большим по модулю за счёт множителя $f(\gamma_k)$. Следовательно, интегральная сумма также может быть сделана сколь угодно большой (по модулю) за счёт выбора точки γ_k . Но это означает, что неравенство (7.3) не может выполняться для произвольного выбора точек γ_i ни для одного числа I при, например, $\varepsilon = 1$. А это противоречит определению интегрируемости функции. ▶

Однако заметим, что существуют ограниченные, но неинтегрируемые функции. Например, *функция Дирихле*^{*}

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррациональное число,} \\ 1, & \text{если } x \text{ рациональное число} \end{cases}$$

есть ограниченная, но неинтегрируемая на любом отрезке функция.

Действительно, при любом разбиении T отрезка $[a; b]$ интегральная сумма $S_T = 0$, если все числа γ_i взять иррациональными, и $S_T = b - a$, если все числа γ_i взять рациональными. Отсюда следует, что суммы S_T не могут иметь предела, независимого от выбора точек γ_i , т.е. функция Дирихле не интегрируема на $[a; b]$.

Таким образом, *ограниченность функции есть необходимое условие интегрируемости, но не достаточное.*

^{*} Дирихле Петер (1805–1859) – немецкий математик.

3. Классы интегрируемых функций

Вместе с тем всякая непрерывная на отрезке функция интегрируема на нём. Более того, интегрируемыми будут *кусочно-непрерывные* на отрезке функции, т.е. имеющие на нём конечное

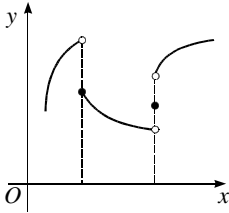


Рис.7.2.

число точек разрыва, причём только 1-го рода (рис.7.2). Но даже кусочная непрерывность не является необходимым условием интегрируемости, так как существуют интегрируемые функции с бесконечным числом точек разрыва 1-го рода. Эти утверждения в данной книге не доказываются. Примем без доказательства ещё следующие утверждения: 1) *если функция интегрируема на отрезке, то её модуль также интегрируем на этом отрезке*; 2) *если функция интегрируема на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[\alpha; \beta] \subset [a; b]$* .

7.3. Свойства определённого интеграла

1°. *Постоянная функция интегрируема и $\int_a^b C dx = C(b-a)$.*

◀ Действительно, для постоянной функции $S_T = C(b-a)$. Значит,
 $\lim_{\lambda_T \rightarrow 0} S_T = C(b-a)$. ▶

2°. *Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$, то $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$ для любого числа α , т.е. постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.*

◀ Для произвольного разбиения T имеем

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \lim_{\lambda_T \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha f(\gamma_i) \Delta x_i = \alpha \lim_{\lambda_T \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\gamma_i) \Delta x_i = \alpha \int_a^b f(x) dx . \blacktriangleright$$

Аналогично доказываются следующие свойства определённого ин-

теграла.

3°. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a; b]$, то их сумма (разность) также интегрируемы на $[a; b]$ и

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

4°. Если функции $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы на $[a; b]$, причём $f(x) \leq g(x)$ на $[a; b]$, то $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Геометрический смысл последнего свойства для неотрицательных функций очевиден: чем ближе график функции расположен к оси Ox , тем меньше будет площадь криволинейной трапеции при одном и том же основании $[a; b]$.

Из свойств 1° и 4° вытекает следующее свойство.

5°. Если функция $f(x)$ интегрируема и $m \leq f(x) \leq M$ на $[a; b]$, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

6°. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$, то $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

◀ Из определения модуля следует, что $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. Тогда, по свойству 4°, выполняется двойное неравенство: $-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$, что и означает, что модуль числа $\int_a^b f(x) dx$ не больше числа $\int_a^b |f(x)| dx \geq 0$. ▶

Теорема 7.2 (аддитивность определённого интеграла). Если

функция $f(x)$ интегрируема на каждом из отрезков $[a; c]$ и $[c; b]$, $a < c < b$, то она интегрируема на $[a; b]$ и справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \quad (7.4)$$

◀ Пусть $T^* = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ – произвольное разбиение отрезка $[a; b]$, но включающее точку c . Пусть $c = x_k$, $0 < k < n$. Интегральную сумму для этого разбиения можно записать в виде

$$S_{T^*} = \sum_{i=0}^{n-1} f(\gamma_i) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{k-1} f(\gamma_i) \Delta x_i + \sum_{i=k}^{n-1} f(\gamma_i) \Delta x_i = S_{T^*}^{(1)} + S_{T^*}^{(2)},$$

где $S_{T^*}^{(1)}$ есть интегральная сумма для $f(x)$ на отрезке $[a; c]$, а $S_{T^*}^{(2)}$ – на $[c; b]$. Тогда, в силу интегрируемости функции на отрезках $[a; c]$ и $[c; b]$, получаем

$$\lim_{\lambda_{T^*} \rightarrow 0} S_{T^*} = \lim_{\lambda_{T^*} \rightarrow 0} S_{T^*}^{(1)} + \lim_{\lambda_{T^*} \rightarrow 0} S_{T^*}^{(2)} = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \quad (7.5)$$

Пусть теперь T – разбиение отрезка, не включающее точку c , причём c лежит между x_k и x_{k+1} . Добавим к разбиению T точку c . Получим разбиение T^* . При одинаковом выборе точек γ_i интегральные суммы для разбиений T и T^* будут отличаться только тем, что *одно слагаемое* $f(\gamma_k) \Delta x_k$, $x_k \leq \gamma_k \leq x_{k+1}$, в сумме S_T *заменится на сумму двух слагаемых* $f(\gamma'_k)(c - x_k) + f(\gamma''_k)(x_{k+1} - c)$, где $x_k \leq \gamma'_k \leq c$, $c \leq \gamma''_k \leq x_{k+1}$, в сумме S_{T^*} . В силу ограниченности интегрируемой функции $f(\gamma_k) \Delta x_k$ и $f(\gamma'_k)(c - x_k) + f(\gamma''_k)(x_{k+1} - c)$ стремятся к нулю при $\lambda_T \rightarrow 0$. Поэтому $\lim_{\lambda_T \rightarrow 0} S_T$ существует и равен $\lim_{\lambda_{T^*} \rightarrow 0} S_{T^*}$. Но

$$\lim_{\lambda_T \rightarrow 0} S_T, \text{ по определению, есть } \int_a^b f(x)dx, \text{ а } \lim_{\lambda_{T^*} \rightarrow 0} S_{T^*} \text{ равен, как дока-}$$

зано выше (см. (7.5)), сумме интегралов по промежуткам $[a; c]$ и

$[c; b]$. ►

Примем, по определению, что $\int_a^a f(x)dx = 0$ и $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, если $b < a$. Тогда равенство (7.4) будет верно при любом

расположении точек a, b, c , лишь бы функция $f(x)$ была интегрируема на самом большем отрезке, образованном этими точками. Например, $1 = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \int_0^{3\pi/2} \cos x dx + \int_{3\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx = -1 + 2$.

Теорема 7.3 (теорема о среднем). Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то существует точка $\gamma \in [a; b]$ такая, что $\int_a^b f(x)dx = f(\gamma)(b-a)$.

◄По свойству функций, непрерывных на отрезке, функция $f(x)$ достигает на $[a; b]$ своих наименьшего и наибольшего значений (см. теорему 2.31). Обозначим их m и M соответственно: $m \leq f(x) \leq M$ для всех $x \in [a; b]$. Тогда, в силу свойства 5°,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \text{ или } m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Таким образом, число $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ лежит между наименьшим и наибольшим значениями непрерывной функции. Но непрерывная функция принимает все промежуточные значения между минимумом и максимумом (см. теорему 2.33). Значит, существует точка $\gamma \in [a; b]$ такая, что

$$f(\gamma) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx. \text{ ►}$$

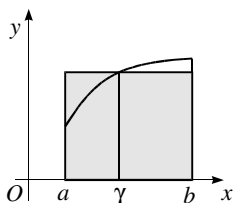


Рис.7.3.

Замечания. 1. Число $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ назы-

вают *средним значением функции на отрезке* $[a; b]$.

2. Теорема 7.3 имеет ясный геометрический смысл: для неотрицательной интегрируемой на $[a; b]$ функции $f(x)$ криволинейная трапеция равна прямоугольнику с основанием $b-a$ и высотой $f(\gamma)$, где γ – некоторая точка отрезка $[a; b]$ (рис.7.3).

7.4. Формула Ньютона – Лейбница

Вычисление определённых интегралов по определению представляет непростую задачу даже для несложных функций. Например, вы-

числим по определению $\int_0^1 x dx$. Функция $f(x) = x$ непрерывна на от-

резке $[0; 1]$, поэтому интегрируема и достаточно найти предел

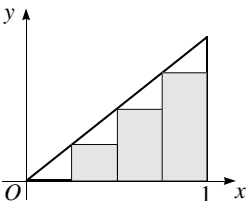


Рис.7.4.

интегральных сумм для *одного какого-то разбиения и одного выбора точек* на частичных отрезках. Удобно для данной функции взять разбиение отрезка $[0; 1]$ на n равных частей

точками $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$, а за точки γ_i

взять левые концы частичных отрезков (рис.7.4).

Тогда $\Delta x_i = 1/n$ для любого i и $f(\gamma_i) = i/n$.

Следовательно, учитывая, что $1 + 2 + \dots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$, получаем:

$$S_T = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} = \frac{1}{n^2} (1 + 2 + \dots + n - 1) = \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{n-1}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

при $\lambda_T = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Таким образом, $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$, что, как и следовало ожидать, совпадает со значением площади прямоугольного треугольника, длины катетов которого равны 1. Если таким же способом вычислять интеграл $\int_0^1 x^2 dx$, то нужно знать формулу суммы квадратов первых n натуральных чисел: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ для вычисления $\int_0^1 x^3 dx$ – суммы кубов и т.д.

Поэтому важнейшее значение имеет доказываемая ниже формула Ньютона – Лейбница*, сводящая вычисление определённых интегралов к нахождению первообразных функций.

1. Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана интегрируемая функция f . Тогда, как указывалось выше, она будет интегрируема и на любом отрезке $[a; x]$, $a \leq x \leq b$. Значение интеграла от функции f по промежутку

$[a; x]$ будет функцией от x : $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$. Здесь переменная интегрирования обозначена буквой t , чтобы отличать её от x – обозначения

верхнего предела интеграла. Функцию $\Phi(x)$ называют *интегралом с переменным верхним пределом*.

Теорема 7.4. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то функция $\Phi(x)$ является первообразной функцией для $f(x)$ на $[a; b]$,

* Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646–1716) – немецкий математик.

$$\text{т.е.} \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x) \text{ на } [a; b].$$

◀Необходимо доказать, что $\Phi'(x) = f(x)$ для любого $x \in [a; b]$.

По определению производной, $\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x}$. Используя теорему 7.2 и замечания к ней, имеем:

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

Отсюда и из теоремы 7.3 о среднем следует: $\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(\gamma)\Delta x$, где γ лежит между x и $x + \Delta x$. Если Δx устремить к нулю, то γ также устремится к x , а значит и $f(\gamma) \rightarrow f(x)$ в силу непрерывности функции f . Поэтому

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\gamma)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\gamma) = f(x). \blacktriangleright$$

2. Формула Ньютона – Лейбница

Теорема 7.5. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b, \quad (7.6)$$

где $F(x)$ – произвольная первообразная функции $f(x)$.

◀Интеграл с переменным верхним пределом $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ является по теореме 7.4 первообразной для $f(x)$. Так как $\Phi(b) = \int_a^b f(t) dt$ и $\Phi(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$, то для первообразной $\Phi(x)$

равенство (7.6) выполняется. Пусть $F(x)$ – произвольная первообразная функции $f(x)$. В силу теоремы 6.1 существует константа C такая, что $F(x) = \Phi(x) + C$. Значит,

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a) = (\Phi(b) + C) - (\Phi(a) + C) = F(b) - F(a). \blacktriangleright$$

7.5. Методы интегрирования для определённого интеграла

Теорема 7.6 (метод замены переменной). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha; \beta]$, причём $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))d\varphi(t). \quad (7.7)$$

Замечание. Естественно, считается, что функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha; \beta]$.

◀Так как подынтегральные функции в интегралах (7.7) непрерывны, то все они существуют. Докажем их равенство. Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$. Из правила дифференцирования сложной функции (см. также доказательство теоремы 6.2) следует, что функция $F(\varphi(t))$ будет первообразной для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Поэтому, по формуле Ньютона – Лейбница (7.6),

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx. \blacktriangleright$$

Замечание. Подчеркнём, что при замене переменной в определённом интеграле нет необходимости, в отличие от неопределённого интеграла, возвращаться к старой переменной. Кроме того, при замене переменной в определённом интеграле пределы интегрирования, вообще говоря, изменяются. При этом нижний предел интегрирования α мо-

жет оказаться больше верхнего предела интегрирования β (см. пример 7.1 и сравните его с примером 6.4).

Пример 7.1. Вычислить $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

◀Произведём замену переменной $x = \cos t$. Тогда $dx = -\sin t dt$, а из равенств $0 = \cos t$ и $1 = \cos t$ находим новые нижний $t = \pi/2$ и, соответственно, верхний $t = 0$ пределы интегрирования. По формуле (7.7)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= - \int_{\pi/2}^0 \sin^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \\ &= \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Теорема 7.7 (метод интегрирования по частям). Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a; b]$, то

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \quad (7.8)$$

Замечание. Формулу (7.8) обычно записывают так: $\int_a^b u dv =$

$$= uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

◀Из правила дифференцирования произведения следует, что функция $u(x)v(x)$ будет первообразной для $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Поэтому, по формуле Ньютона – Лейбница,

$$\int_a^b [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)] dx = u(x)v(x) \Big|_a^b$$

или

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^b,$$

что равносильно равенству (7.8). ►

Пример 7.2. Вычислить $\int_0^2 x e^{2x} dx$.

◄Положим $u(x) = x$, $dv(x) = e^{2x} dx$. Тогда $du = dx$ и $v(x) = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}$. Следовательно, $\int_0^2 x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} \Big|_0^2 - \frac{1}{2} \int_0^2 e^{2x} dx =$
 $= e^4 - \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^2 = \frac{3}{4} e^4 + \frac{1}{4}$. ►

7.6. Несобственные интегралы

В данном выше определении определённого интеграла промежутки интегрирования обязательно должны быть конечными. В противном случае мелкость разбиения равнялась бы бесконечности и не могла стремиться к нулю. Кроме того, было доказано, что интегрируемая функция обязательно должна быть ограниченной. Вместе с тем решение многих задач требует обобщения понятия интеграла на случай бесконечных промежутков и неограниченных функций.

1. Несобственные интегралы по бесконечному промежутку

Пусть функция $f(x)$ задана на бесконечном промежутке $[a; +\infty)$ и интегрируема на любом конечном промежутке $[a; b]$.

Определение. Предел $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ называют *несобственным интегралом от функции $f(x)$ с бесконечным верхним пределом (несобственным интегралом 1-го рода)* и обозначают символом $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Итак, по определению, $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$. Если предел конечен, то несобственный интеграл называют *сходящимся*, если же конечного предела нет, то говорят, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *расходится*.

Пример 7.3. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

◀Имеем $\int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x \Big|_0^b = \arctg b$. Так как $\arctg b \rightarrow \frac{\pi}{2}$ при $b \rightarrow +\infty$, то

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b = \frac{\pi}{2}. \blacktriangleright$$

Если функция $f(x)$ неотрицательная, то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ выражает площадь бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, прямой $x=a$ и осью Ox . Например, из рассмотренного выше примера следует, что площадь бесконечной фигуры, ограниченной графиком функции $y = \frac{1}{1+x^2}$ и осью абсцисс, равна π (рис.7.5).

Аналогичным образом определяется несобственный интеграл $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$. Если оба, верхний и нижний, пределы бесконечные,

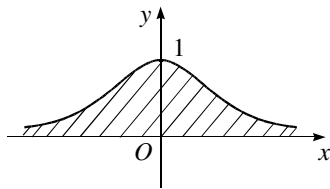


Рис.7.5.

то, по определению, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b \rightarrow +\infty \\ a \rightarrow -\infty}} \int_a^b f(x)dx$. Вместе с тем, на-

пример, в теории интегралов Фурье, последний несобственный интеграл

может быть определён и так: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x)dx$. При этом

несобственный интеграл во втором смысле может сходиться, а в первом

– расходиться. Например, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{2x}{1+x^2} dx = 0$, а $\lim_{\substack{b \rightarrow +\infty \\ a \rightarrow -\infty}} \int_a^b \frac{2x}{1+x^2} dx =$

$= \lim_{\substack{b \rightarrow +\infty \\ a \rightarrow -\infty}} (\ln(1+b^2) - \ln(1+a^2))$ не существует, если a и b стремятся к

бесконечности независимо друг от друга.

2. Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $f(x)$ задана на полуинтервале $[a; b)$, ограничена и интегрируема на любом отрезке $[a; b - \varepsilon]$, $0 < \varepsilon < b - a$, но не ограничена на всем промежутке $[a; b)$, например, $f(x) \rightarrow \infty$, если $x \rightarrow b - 0$. В этом случае говорят, что функция *имеет особенность в точке b* (говорят также, что точка b *особая*).

Определение. Предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ называют *несобственным интегралом от неограниченной функции $f(x)$ с особенностью в точке b* (несобственным интегралом 2-го рода) и обозначают симво-

лом $\int_a^b f(x)dx$.

Аналогичным образом определяется несобственный интеграл 2-го рода от функции с особенностью в точке a . Если функция $f(x)$ имеет особенности одновременно в точках a и b , то полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0+ \\ \delta \rightarrow 0+}} \int_{a+\delta}^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ имеет особенность в точке c , лежащей внутри отрезка $[a; b]$, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ представляют в виде суммы двух несобственных интегралов — $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$.

При этом интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называют *сходящимся*, если сходятся одновременно оба несобственных интеграла. Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ с особой точкой $a < c < b$ может быть определён и так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right).$$

Пример 7.4. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

$$\blacktriangleleft \text{Имеем } \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x} \Big|_0^{1-\varepsilon} = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \rightarrow 2, \quad \text{если } \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$\varepsilon > 0. \text{ Следовательно, } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2. \blacktriangleright$$

3. Применение формулы Ньютона – Лейбница

Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$ на промежутке

$[a; +\infty)$ и существует конечный предел $\lim_{b \rightarrow +\infty} F(b)$, который обозначим $F(+\infty)$, то можно написать формулу Ньютона – Лейбница для несобственных интегралов 1-го рода

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}.$$

Аналогично, если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$ на промежутке $[a; b)$ и существует конечный предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} F(b - \varepsilon)$, который обозначим $F(b)$, то получим обычную формулу:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

4. Несобственные интегралы от неотрицательных функций

Рассмотрим сначала случай несобственных интегралов 1-го рода.

Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, если функция $\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx$

имеет конечный предел при $b \rightarrow +\infty$. В общем случае вопрос существования предела функции решается с помощью критерия Коши (теорема 2.19). Ситуация значительно упрощается, если подынтегральная функция $f(x)$ неотрицательна на $[a; +\infty)$. В этом случае функция $\Phi(b)$ будет неубывающей на $[a; +\infty)$, а *неубывающая на $[a; +\infty)$ функция имеет конечный предел при стремлении аргумента к бесконечности тогда и только тогда, когда она ограничена сверху*. Таким

образом, для неотрицательной функции $f(x)$ интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx \leq C \text{ для любого } a < b < +\infty \text{ (} C = \text{const} \text{)}.$$

На данном несложном выводе основана следующая теорема срав-

нения, позволяющая устанавливать сходимость несобственных интегралов от неотрицательных функций.

Пусть заданы два несобственных интеграла 1-го рода:

$$(I) \int_a^{+\infty} f(x)dx \quad \text{и} \quad (II) \int_a^{+\infty} g(x)dx .$$

Теорема 7.8. Если $0 \leq f(x) \leq g(x)$ на $[a; +\infty)$, то из сходимости интеграла (II) следует сходимость интеграла (I), а из расходимости интеграла (I) – расходимость интеграла (II).

◀Рассмотрим две функции: $\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx$ и $G(b) = \int_a^b g(x)dx$.

По свойству 4° определённых интегралов (см. подразд.7.3), $\Phi(b) \leq G(b)$ для любого $b \in [a; +\infty)$.

Если интеграл (II) сходится, то функция $G(b)$ ограничена сверху, а значит, функция $\Phi(b)$ также ограничена сверху и интеграл (I) будет сходящимся.

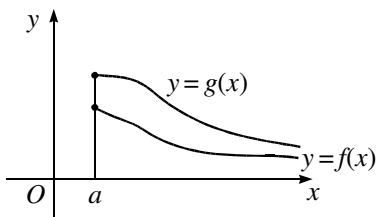


Рис.7.6.

Если интеграл (I) расходится, то функция $\Phi(b)$ не ограничена сверху, а значит, функция $G(b)$ также не ограничена сверху и интеграл (II) расходится. ▶

Замечание. Теорема 7.8 имеет простую геометрическую иллюстрацию (рис.7.6): если площадь под графиком функции $g(x) \geq 0$, $a \leq x < +\infty$ – конечная, то площадь под графиком функции $f(x) \geq 0$, лежащим не выше графика $g(x)$, тем более будет конечной. Если площадь под графиком $f(x)$ бесконечная, то тем более будет бесконечной площадь под более высоким графиком.

Часто для исследования сходимости удобно применять «предельную» теорему сравнения, являющуюся следствием теоремы 7.8.

Теорема 7.9. Пусть $f(x), g(x) > 0$ на $[a; +\infty)$. Если существует

конечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k > 0$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

◀Прежде всего заметим следующее. Зафиксируем какое-либо число $A > a$. В силу свойства аддитивности определённого интеграла

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^A f(x)dx + \int_A^b f(x)dx = \Phi_1(b) + \int_A^b f(x)dx.$$

Отсюда следует, что $\Phi(b)$ и $\Phi_1(b)$ отличаются на константу, и поэтому конечные пределы у функций $\Phi(b)$ и $\Phi_1(b)$ при $b \rightarrow +\infty$ могут

существовать только одновременно. Значит, интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и

$\int_A^{+\infty} f(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся. Одновременно схо-

дятся или расходятся также интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} \alpha f(x)dx$, если

$\alpha \neq 0$.

Теперь возьмём окрестность $\left(\frac{k}{2}; \frac{3k}{2}\right)$ числа $k > 0$. По определению предела функции на бесконечности, существует такое число $A > a$, что для всех $x \geq A$ выполняется двойное неравенство $\frac{k}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3k}{2}$,

или $\frac{k}{2} g(x) < f(x) < \frac{3k}{2} g(x)$.

Пусть $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Тогда интеграл $\int_A^{+\infty} f(x)dx$ также сходит-

ся и, по теореме 7.8, будет сходиться и интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{k}{2} g(x) dx$, а значит,

сходится интеграл $\int_a^{+\infty} g(x) dx$. Если $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится, то расходится

интеграл $\int_A^{+\infty} f(x) dx$ и тем более расходится интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{3k}{2} g(x) dx$, что

влечёт за собой расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} g(x) dx$. ►

Формулировки теорем 7.8, 7.9 и их доказательства очевидным образом переносятся на случай несобственных интегралов 2-го рода $\int_a^b f(x) dx$ и $\int_a^b g(x) dx$, имеющих одновременно особенность в точке b .

Например, теорема 7.9 в этом случае формулируется так.

Пусть $f(x), g(x) > 0$ на $[a; b)$. Если существует конечный пре-

дел $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k > 0$, то интегралы $\int_a^b f(x) dx$ и $\int_a^b g(x) dx$ сходятся

или расходятся одновременно.

5. Применение теорем сравнения для исследования сходимости несобственных интегралов

При использовании теорем 7.8 и 7.9 для исследования сходимости несобственных интегралов нужно иметь для сравнения «эталонные» несобственные интегралы, о которых известно – сходятся ли они или расходятся. Простыми и вместе с тем часто используемыми «эталонами» являются несобственные интегралы 1-го рода $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ и несобственные

интегралы 2-го рода $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$.

Теорема 7.10. Несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится, если $\alpha > 1$, и расходится, если $\alpha \leq 1$.

◀По определению,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \begin{cases} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_1^b, & \alpha \neq 1, \\ \ln x \Big|_1^b, & \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1, \\ \infty, & \alpha \leq 1. \end{cases} \blacktriangleright$$

Замечание. Аналогично доказывается, что интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $a > 0$, сходится при $\alpha > 1$, и расходится, если $\alpha \leq 1$.

Теорема 7.11. Несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится, если $\alpha < 1$, и расходится, если $\alpha \geq 1$.

◀Также, по определению,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \begin{cases} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_\varepsilon^1, & \alpha \neq 1, \\ \left. \ln x \right|_\varepsilon^1, & \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1, \\ \infty, & \alpha \geq 1. \end{cases} \blacktriangleright$$

Замечание. Интегралы $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ и $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ сходятся, если

$\alpha < 1$, и расходятся, если $\alpha \geq 1$.

Пример 7.5. Исследовать на сходимость интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{x^2+3}{5-2x+4x^3} dx$.

◀ Для $x \geq 2$ подынтегральная дробь $f(x) = \frac{x^2+3}{5-2x+4x^3} > 0$. При

$x \rightarrow +\infty$ порядок роста числителя дроби x^2+3 определяется слагаемым x^2 , а порядок роста знаменателя $5-2x+4x^3$ – слагаемым $4x^3$.

Поэтому естественно сравнить $f(x)$ с функцией $g(x) = \frac{x^2}{4x^3} = \frac{1}{4x}$:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x(x^2+3)}{5-2x+4x^3} = 1 > 0$. Несобственный интеграл

$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{4x}$ расходится. Следовательно, интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{x^2+3}{5-2x+4x^3} dx$ также

расходится. ▶

Пример 7.6. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{x^2+\sin x}{\sqrt{1-x}} dx$.

◀ Особой является точка $x=1$. Для $0 \leq x \leq 1$ выражение $x^2+\sin x$ неотрицательно и ограничено сверху числом 2. Поэтому сравниваем $f(x) = \frac{x^2+\sin x}{\sqrt{1-x}}$ с $g(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x}}$: $0 \leq f(x) = \frac{x^2+\sin x}{\sqrt{1-x}} \leq$

$\leq \frac{2}{\sqrt{1-x}} = g(x)$. Интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ сходится (см. замечание к теореме

7.11). Значит, интеграл $\int_0^1 \frac{x^2 + \sin x}{\sqrt{1-x}} dx$ также сходится. ►

6. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов

Доказанные выше теоремы сравнения неприменимы в том случае, когда в несобственном интеграле подынтегральная функция $f(x)$ может принимать при стремлении аргумента к особой точке как положительные, так и отрицательные значения. Однако теоремы сравнения можно применить к неотрицательной функции $|f(x)|$ и на основании сформулированной ниже теоремы сделать вывод о сходимости исходного интеграла.

Теорема 7.12. Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ (интеграл $\int_a^b |f(x)| dx$), то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ (интеграл $\int_a^b f(x) dx$).

В этом случае интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ (интеграл $\int_a^b f(x) dx$) называют *абсолютно сходящимся*.

Пример 7.7. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 2x} dx$.

◄ Функция $\frac{\sin x}{x^2 + 2x}$ не сохраняет знак при $x \rightarrow +\infty$. Поэтому непосредственно к исходному интегралу теоремы сравнения неприменимы.

Но для $x \geq 1$ $\left| \frac{\sin x}{x^2 + 2x} \right| \leq \frac{1}{x^2 + 2x} \leq \frac{1}{x^2}$. Так как интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, то по признаку сравнения будет сходиться интеграл $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^2 + 2x} \right| dx$.

Следовательно, по теореме 7.12, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 2x} dx$ сходится, причём абсолютно. ►

Отметим, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ может сходиться, тогда как интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ расходится. В таком случае интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называют *условно сходящимся*. Например, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ условно сходящийся, так как сам интеграл сходится, а интеграл $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ — расходится.

7.7. Приближённое вычисление определённых интегралов

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и требуется вычислить определённый интеграл $\int_a^b f(x) dx$. Как отмечалось выше, не для всякой непрерывной функции её первообразная является элементарной функцией. Но даже если первообразная и является элементарной функцией, то часто её сложно найти. В таких случаях применение фор-

мулы Ньютона – Лейбница затруднительно и используют различные методы приближённого вычисления определённых интегралов. Рассмотрим некоторые из них, вытекающие из трактовки интеграла (в случае $f(x) \geq 0$) как площади криволинейной трапеции и идеи приближения площади криволинейной трапеции площадью более простой фигуры.

1. Формулы прямоугольников и трапеций

Разделим отрезок $[a; b]$ на n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n}$ точками $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, ..., $x_n = a + nh = b$. Возьмём в отрезках $[x_i; x_{i+1}]$ их середины $x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} = a + ih + \frac{h}{2}$ и вычислим значения функции в них: $y_{1/2} = f(x_{1/2})$, $y_{3/2} = f(x_{3/2})$, ..., $y_{n-1/2} = f(x_{n-1/2})$. Составим сумму $h(y_{1/2} + y_{3/2} + \dots + y_{n-1/2})$. Она является интегральной суммой для функции $f(x)$ на $[a; b]$, и поэтому можно написать приближённое равенство

$$\int_a^b f(x) dx \approx h(y_{1/2} + y_{3/2} + \dots + y_{n-1/2}). \quad (7.9)$$

Формула (7.9) называется *формулой прямоугольников*. Так как определённый интеграл есть предел интегральных сумм, то погрешность вычисления интеграла по формуле (7.9) с ростом n будет неограниченно уменьшаться. Геометрически формула прямоугольников означает, что площадь криволинейной трапеции заменяется на сумму площадей прямоугольников, основания которых образованы равноотстоящими точками x_i , а высоты прямоугольников равны значениям подынтегральной функции в серединах оснований прямоугольников (рис.7.7,а).

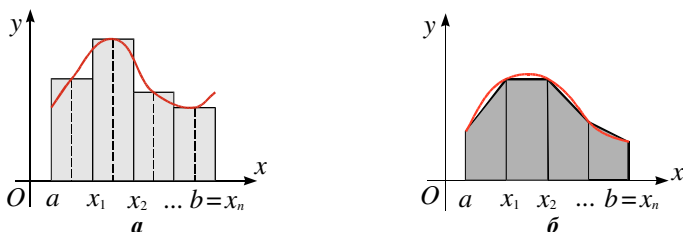


Рис.7.7.

Если криволинейную трапецию на каждом отрезке заменить на обычную трапецию (рис.7.7,б), то получим другую приближённую формулу – *трапеций*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right). \quad (7.10)$$

Здесь числа $y_i = f(x_i)$ равны длинам оснований узких трапеций (основания параллельны оси Oy !), а число h равно высоте каждой трапеции. Так как крайние основания y_0, y_n учитываются только один раз при вычислении площадей трапеций, а остальные основания $y_i, i=1, 2, \dots, n-1$ – дважды, то длины крайних оснований в формуле (7.10) берутся с коэффициентом $1/2$, а остальные – с коэффициентом 1.

2. Формула Симпсона (парабол)

Формулу трапеций можно интерпретировать следующим образом: подынтегральная функция $f(x)$ на каждом промежутке $[x_i; x_{i+1}]$ заменяется *линейной* функцией (т.е. многочленом первой степени), график которой проходит через концы графика $f(x)$ на этом промежутке (см. рис.7.7,б). Поэтому по формуле трапеций получим *точное* значение интеграла по промежутку $[x_i; x_{i+1}]$, если $f(x)$ линейная на нём. Естественно предположить, что в случае нелинейной на промежутках функции, точность вычисления интеграла повысится, если функцию заменять многочленом более высокой степени, чем первой.

Если заменять функцию на многочлен второй степени (т.е. заменять график функции параболой), то получится формула Симпсона (парабол). Для однозначного задания параболы нужны три точки. Поэтому

промежутков $[a; b]$ делят на чётное число равных частей длины $h = \frac{b-a}{2n}$ точками $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, 2, \dots, 2n$. Заменяя на «двойном»

промежутке $[x_0; x_2]$ график функции параболой, проходящей через три точки (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , нетрудно получить приближённое

равенство $\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$. Аналогичные приближённые

равенства будут верны и для промежутков $[x_2; x_4]$, ..., $[x_{2n-2}; x_{2n}]$. Складывая их, получим формулу:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})). \quad (7.11)$$

Формула Симпсона* (7.11) при одном и том же объёме вычислений обычно даёт более точный результат приближённого вычисления интеграла, чем формулы прямоугольников и трапеций.

Пример 7.8. Вычислить приближённо интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

◀ Точное значение интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = 0,6931\dots$. Вычислим

его приближённые значения по формуле трапеций и Симпсона, разделив промежуток интегрирования на четыре равных части точками $x_0 = 0$, $x_1 = 0,25$, $x_2 = 0,5$, $x_3 = 0,75$, $x_4 = 1$. В этом случае $h = 0,25$. Значения (вычисляем с четырьмя знаками после запятой)

* Симпсон Томас (1710–1761) – английский математик.

функции $\frac{1}{1+x}$ в точках деления равны: $y_0 = 1,0000$, $y_1 = 0,8000$,

$y_2 = 0,6667$, $y_3 = 0,5714$, $y_4 = 0,5000$. По формуле трапеций

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0,25 \left(\frac{1,0000 + 0,5000}{2} + 0,8000 + 0,6667 + 0,5714 \right) = 0,6970,$$

а по формуле Симпсона

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{0,25}{3} (1,0000 + 0,5000 + 4 \cdot (0,8000 + 0,5714) + 2 \cdot 0,6667) =$$
$$= 0,6933,$$

что значительно точнее результата, полученного по формуле трапеций. ►

8. Приложения интегрального исчисления

8.1. Вычисление площадей плоских фигур

1. Площадь плоской фигуры в прямоугольных координатах

Если фигура является криволинейной трапецией, ограниченной графиком интегрируемой функции $y = f(x)$, вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox (см. рис.7.1), то, как отмечалось в подразд. 7.2,

её площадь $S = \int_a^b f(x)dx$. Если $f(x) \leq 0$ на $[a; b]$, то интеграл

$\int_a^b f(x)dx \leq 0$ и соответствующая криволи-

нейная трапеция будет иметь площадь

$S = -\int_a^b f(x)dx$. Если плоская фигура огра-

ничена сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу графиком функции $y = g(x)$, а с боков вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис.8.1), то площадь фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

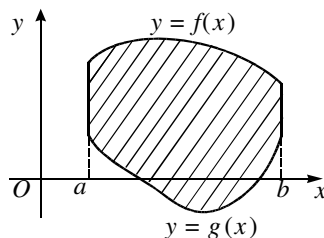


Рис.8.1.

2. Площадь плоской фигуры в полярных координатах

Сначала опишем, что такое *полярная система координат* и *полярные координаты* точки на плоскости.

Выберем на плоскости точку O , называемую *поллюсом*, и направленную полупрямую, выходящую из этой точки, называемую *полярной осью*. На полярной оси зададим единичный отрезок OE . Произвольной

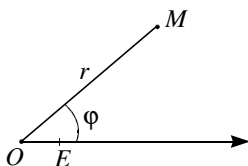


Рис.8.2.

паре чисел (r, φ) , $r \geq 0$, $-\infty < \varphi < +\infty$ соответствует точка M на плоскости такая, что расстояние от M до полюса равно r , а угол между радиусом-вектором $\overrightarrow{OM}$ и полярной осью равен φ (рис.8.2), при этом положительным направлением отсчёта угла считается направление против часовой стрелки.

Если угол φ брать в пределах полуинтервала длиной 2π (обычно берут промежуток $[0; 2\pi)$ или $[-\pi; \pi)$), то всякой точке на плоскости, кроме полюса, соответствует вполне определённая пара чисел (r, φ) , называемых *полярными координатами* точки. Для полюса O значение угла φ не определено, но это единственная точка на плоскости, для которой $r=0$.

Зависимость $r=r(\varphi)$ или $\varphi=\varphi(r)$ между полярными координатами определяет некоторую линию на плоскости. Например, уравнение $r=a$, $a=\text{const} > 0$, задаёт окружность радиуса a с центром в полюсе, уравнение $\varphi=\theta$, $\theta=\text{const}$, задаёт луч, выходящий из полюса и образующий с полярной осью угол θ .

Для построения линии $r=r(\varphi)$ обычно составляют таблицу значений r для ряда значений φ , отмечают соответствующие точки на плоскости, а затем проводят через нанесённые точки линию. Отметим, что значения углов, для которых $r < 0$, пропускаются.

Пример 8.1. Построить кривую $r=2\cos\varphi$.

◀Так как функция $r=2\cos\varphi$ чётная, то кривая будет симметрична относительно полярной оси. Учтём, что $r < 0$ для $\varphi \in (\pi/2; \pi)$. Поэтому составим таблицу значений r лишь для $\varphi \in [0; \pi/2]$

φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
r	2	$\sqrt{3} \approx 1,7$	$\sqrt{2} \approx 1,4$	1	0

Обозначим полученные точки соответственно $M_0, M_{\pi/6}, M_{\pi/4}, M_{\pi/3}, M_{\pi/2}$, отметим их на плоскости и соединим плавной линией. Получим кривую, изображённую на рис.8.3. ►

Зададим на плоскости одновременно с полярной системой координат и прямоугольную систему так, что начало прямоугольной системы совпадает с полюсом, а положительное направление оси Ox – с полярной осью (рис.8.4). Тогда будут выполняться следующие соотношения между полярными и прямоугольными координатами точки на плоскости:

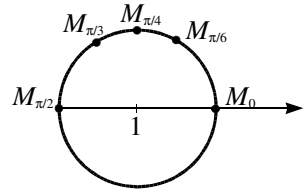


Рис.8.3.

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad \text{и} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}. \quad (8.1)$$

Используя связь между координатами, можно из уравнения линии, заданной в одной системе координат, получить уравнение той же линии в другой системе координат, причём, возможно, более простое. Например, окружность радиуса a с центром в точке O в полярной системе координат задаётся уравнением $r = a$, а в прямоугольной системе уравнение этой окружности имеет более сложный вид:

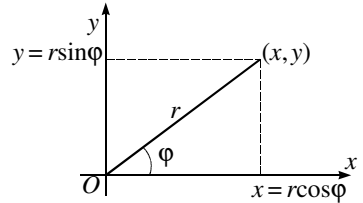


Рис.8.4.

$x^2 + y^2 = a^2$. Если в уравнение $r = 2 \cos \varphi$ (см. пример 8.1) подставить

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, то получим уравнение

$x^2 + y^2 = 2x$, или $(x-1)^2 + y^2 = 1$, т. е. уравнение окружности радиуса 1 с центром в точке $(1, 0)$.

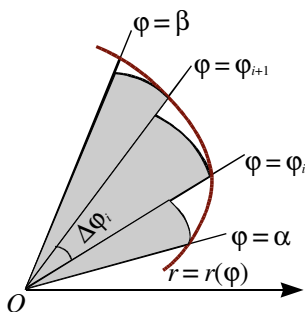


Рис.8.5.

Теперь рассмотрим задачу о вычислении площади фигуры, ограниченной двумя лучами, выходящими из полюса под углами α и β соответственно, и кривой, заданной в полярных координатах непрерывной функцией $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ (рис.8.5). Назовём её *криволинейным полярным сектором*.

Поступим аналогично решению задачи вычисления площади криволинейной трапеции (см. подразд.7.1). Разобьём отрезок $[\alpha; \beta]$ на n частей точками $\alpha = \varphi_0 <$

$< \varphi_1 < \dots < \varphi_n = \beta$ и построим лучи $\varphi = \varphi_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, выходящие из полюса. В результате исходная фигура разобьётся на n более «узких» секторов, также являющихся криволинейными. Теперь заменим приблизительно каждый *криволинейный* сектор на *круговой* сектор с центром в полюсе с радиусом $r_i = r(\varphi_i)$ и центральным углом $\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$. В итоге получим «ступенчатую» фигуру, приближающую исходную фигуру.

Площадь i -го кругового сектора равна $\frac{1}{2}r_i^2\Delta\varphi_i$, а всей ступенчатой

фигуры – $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}r_i^2\Delta\varphi_i$. Устремляя мелкость разбиения (т.е.

$\max \Delta\varphi_i$) к нулю, получим точное значение площади. Так как

$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}r_i^2\Delta\varphi_i$ является интегральной суммой на отрезке $[\alpha; \beta]$ для

непрерывной функции $\frac{1}{2}r^2(\varphi)$, то предел сумм S_n существует и равен

интегралу $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$.

Итак, площадь криволинейного полярного сектора равна

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi. \quad (8.2)$$

Пример 8.2. Найти площадь, ограниченную окружностью $r = 2 \cos \varphi$ (см. пример 8.1).

◀ По формуле (8.2) находим:

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4 \cos^2 \varphi d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi. \blacktriangleright$$

8.2. Объём тела вращения

Рассмотрим задачу о вычислении объёма тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y = f(x) \geq 0$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox .

Разобьём отрезок $[a; b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ и проведем прямые $x = x_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Они разобьют трапецию на n узких криволинейных трапедий. Заменяем каждую узкую трапецию прямоугольником с соответствующим основанием $[x_i; x_{i+1}]$ и высотой $y_i = f(x_i)$. Вращая прямоугольники вокруг оси абсцисс, получим «ступенчатое» тело, состоящее из цилиндров, оси которых совпадают с осью абсцисс, приближающее исходное тело вращения (рис.8.6). Так как радиусы цилиндров равны y_i , а высоты — Δx_i , то объём «ступенчатого» тела будет равен

$V_n = \sum_{i=0}^{n-1} \pi f^2(x_i) \Delta x_i$ — интегральной сумме на отрезке $[a; b]$ для непрерывной функции $\pi f^2(x)$. Переходя к пределу при $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, получим формулу для вычисления объёма тела вращения:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (8.3)$$

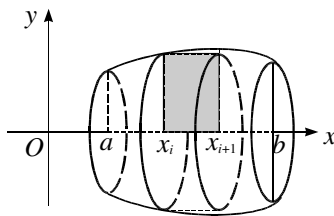


Рис.8.6.

Пример 8.3. Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной

эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис.8.7).

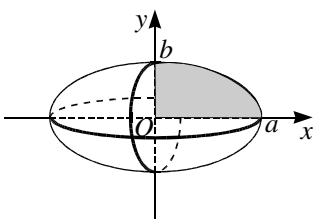


Рис.8.7.

Искомый объём равен удвоенному объёму тела, полученного вращением части фигуры, принадлежащей первой четверти.

Поскольку $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, по формуле (8.3) находим:

$$V = 2\pi \frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = 2\pi \frac{b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{4}{3} \pi a b^2. \blacktriangleright$$

8.3. Длина дуги плоской кривой

1. Длина дуги, заданной явным уравнением

Пусть плоская кривая (дуга) L задана в прямоугольных координатах уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Дадим определение длины дуги и найдём формулу для её вычисления.

Как и в предыдущих случаях, разобьём отрезок $[a; b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Каждому значению x_i соответствует

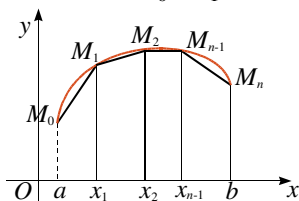


Рис.8.8.

на дуге точка $M_i = (x_i, y_i)$. Соединив последовательно точки M_i отрезками $M_i M_{i+1}$, получим ломаную $L_n = M_0 M_1 \dots M_n$, вписанную в дугу (рис.8.8). Обозначим длину ломаной через l_n . Величина l_n равна сумме длин отрезков

$$M_i M_{i+1} : l_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{i+1}.$$

Определение. Длиной l дуги L называется предел величины

$$l_n, \text{ когда } \max \Delta x_i \rightarrow 0: l = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{i+1}.$$

Если указанный предел существует, то дугу называют *спрямляемой*.

Выведем формулу для вычисления длины дуги, предполагая, что функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ вместе со своей производной $f'(x)$.

Точки M_i и M_{i+1} имеют координаты (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}) соответственно и, значит, длина отрезка $M_i M_{i+1}$ равна $\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$. По теореме о среднем Лагранжа $y_{i+1} - y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(\gamma_i)(x_{i+1} - x_i) = f'(\gamma_i)\Delta x_i$, $\gamma_i \in (x_i, x_{i+1})$. Следовательно, длина i -го отрезка

$$M_i M_{i+1} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(\gamma_i)\Delta x_i)^2} = \sqrt{1 + (f'(\gamma_i))^2} \Delta x_i. \quad (8.4)$$

Таким образом, длина всей ломаной $l_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + (f'(\gamma_i))^2} \Delta x_i$. Данная

сумма является интегральной для непрерывной функции $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$.

Переходя к пределу при $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, получим формулу для вычисления длины дуги:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (8.5)$$

Пример 8.4. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$, $0 \leq x \leq 1$.

◀В данном случае $y' = x^{1/2}$ и

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + (\sqrt{x})^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + x} dx = \frac{2}{3}(1 + x)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1). \blacktriangleright$$

Введём функцию $l(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$, выражающую длину дуги от начальной точки $A = (a, f(a))$ до переменной точки $A_x = (x, f(x))$. Дифференцируя её, получим (см. теорему 6.4): $l'(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$. Значит, дифференциал длины дуги $dl(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

2. Длина дуги, заданной параметрически

Пусть дуга L задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, где функции $\varphi(t)$, $\phi(t)$ непрерывны вместе со своими производными. Предположим, что производная $\varphi'(t) \neq 0$ (например, для определённости, больше нуля) на промежутке $[\alpha; \beta]$. В этом случае на отрезке $[a; b]$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, существует однозначная непрерывная обратная функция $t = \varphi^{-1}(x)$, и вместо параметрического задания дуги можно записать её явное задание: $y = f(x)$.

При этом, как известно (см. формулу (3.20)), $\frac{dy(x)}{dx} = \frac{\phi'(t)}{\varphi'(t)}$, $x = \varphi(t)$.

Выше было доказано, что длина дуги, заданной явным уравнением $y = f(x)$, выражается формулой (8.5). Сделав в ней замену $x = \varphi(t)$, получим:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{\phi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2} \varphi'(t) dt, \text{ или}$$

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\phi'(t))^2} dt. \quad (8.6)$$

Очевидно, что формула (8.6) останется справедливой и в том случае, когда промежуток $[\alpha; \beta]$ можно разбить на несколько частей, на каждой из которых производная $\varphi'(t)$ сохраняет знак. Формулу (8.6)

записывают часто в следующем виде:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'_t(t))^2 + (y'_t(t))^2} dt.$$

Пример 8.5. Вычислить длину дуги $x = \frac{1}{2}t^2$, $y = \frac{1}{3}t^3 + 1$, $0 \leq t \leq 1$.

◀Имеем $x'_t = t$, $y'_t = t^2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} l &= \int_0^1 \sqrt{t^2 + t^4} dt = \int_0^1 t \sqrt{1 + t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1 + t^2} d(1 + t^2) = \\ &= \frac{1}{3} (1 + t^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (\sqrt{8} - 1). \end{aligned}$$

Для *пространственной* кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, $z = \gamma(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, длину также определяют как предел длин ломаных, вписанных в кривую. Если функции $\varphi(t)$, $\phi(t)$, $\gamma(t)$ имеют непрерывные производные, то длина пространственной кривой может быть вычислена по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\phi'(t))^2 + (\gamma'(t))^2} dt.$$

3. Длина дуги, заданной в полярных координатах

Пусть дуга задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, где функция $r(\varphi)$ непрерывно дифференцируема. Используя формулы (8.1) связи между декартовыми и полярными координатами, запишем параметрические уравнения дуги:

$$x = r(\varphi) \cos \varphi, \quad y = r(\varphi) \sin \varphi, \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta.$$

Так как

$$x'_{\varphi} = r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi, \quad y'_{\varphi} = r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi,$$

то $(x'_{\varphi})^2 + (y'_{\varphi})^2 = (r'(\varphi))^2 + r^2(\varphi)$. Применяя формулу (8.6), получаем формулу для вычисления длины дуги в полярных координатах:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (8.7)$$

Пример 8.6. Найти длину окружности $r = 2 \cos \varphi$.

◀ Учитывая симметричность дуги (см. рис.8.3), по формуле (8.7) находим:

$$l = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{4 \cos^2 \varphi + 4 \sin^2 \varphi} d\varphi = 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi = 2\pi. \blacktriangleright$$

8.4. Площадь поверхности вращения

Пусть на плоскости Oxy задана кривая L уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, где $f(x)$ – положительная функция, имеющая непрерывную производную. Вычислим площадь S поверхности, образованной вращением кривой L вокруг оси Ox .

Для этого разобьём отрезок $[a; b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ и впишем в L ломаную $L_n = M_0 M_1 \dots M_n$ (см. рис.8.8). Поверхность, образованная вращением ломаной вокруг оси Ox , состоит из объединения боковых поверхностей усечённых конусов. Радиусы оснований усечённого конуса, образованного вращением отрезка $M_i M_{i+1}$, равны $f(x_i)$ и $f(x_{i+1})$ соответственно, а длина образующей равна $\sqrt{1 + (f'(\gamma_i))^2} \Delta x_i$, $\gamma_i \in (x_i, x_{i+1})$ (см. равенство (8.4)). По формуле площади боковой поверхности усечённого конуса площадь поверхности, образованной вращением ломаной L_n , будет равна

$P_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \sqrt{1 + (f'(\gamma_i))^2} \Delta x_i$. Переходя к пределу при $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, получим, что $S = \lim P_n$.

Сумма P_n не является интегральной, так как в слагаемых значения функции и производной вычисляются в разных точках. Заменяем в сумме числа $\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$ на близкие числа $f(\gamma_i)$. Можно доказать, что

при $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ предел суммы $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi f(\gamma_i) \sqrt{1 + (f'(\gamma_i))^2} \Delta x_i$ равен пределу суммы P_n . Но S_n уже будет интегральной суммой для функции $2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}$. Следовательно, площадь поверхности вращения

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (8.8)$$

Пример 8.7. Найти площадь поверхности параболоида, образованного вращением вокруг оси Ox дуги параболы $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq a$.

◀Имеем: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. По формуле (8.8) получим

$$S = 2\pi \int_0^a \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx = \pi \int_0^a \sqrt{4x+1} dx = \frac{\pi}{6} (4x+1)^{3/2} \Big|_0^a = \frac{\pi}{6} \left((4a+1)^{3/2} - 1 \right). \blacktriangleright$$

8.5. Схема применения определённого интеграла

Нетрудно заметить, что во всех рассмотренных выше применениях определённого интеграла использовалась одна и та же схема. Оказывается, что по такой же схеме можно использовать определённый интеграл к вычислению различных других величин.

Пусть требуется найти некоторую величину P , зависящую от промежутка $[a; b]$: $P = P([a; b])$. При этом известно, что величина P обладает свойством аддитивности: $P([a; b]) = P([a; c]) + P([c; b])$, если $c \in (a; b)$. Тогда для вычисления $P([a; b])$ может быть использована следующая схема.

1. Разбиваем отрезок $[a; b]$ на n частей $[a; x_1]$, $[x_1; x_2]$, ..., $[x_{n-1}; b]$ равной длины $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

2. Используя знания о величине P , находим такую функцию $p(x)$, что для каждого i величина $\Delta P_i = P([x_i; x_{i+1}])$ отличается от произведения $p(x_i)\Delta x$ на бесконечно малую более высокого порядка, чем Δx . Тогда $P = \sum_i \Delta P_i \approx \sum_i p(x_i)\Delta x$ – интегральной сумме для функции $p(x)$ на отрезке $[a; b]$.

3. Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим, что величина P точно равна интегралу $\int_a^b p(x)dx$.

Отметим, что в приложениях интеграла обычно вместо приближённого равенства $\Delta P_i \approx p(x_i)\Delta x$ для приращения на отдельных промежутках пишут точное равенство $dP = p(x)dx$ для дифференциала и величину P получают его интегрированием. При этом рассуждения проводят без разбиения отрезка $[a; b]$ на части и, как правило, без детального обоснования приближённого равенства $\Delta P_i \approx p(x_i)\Delta x$, ограничиваясь интуитивными представлениями.

Проиллюстрируем схему несколькими примерами. Подчеркнём, что основным в схеме является установление соотношений $\Delta P_i \approx p(x_i)\Delta x$ или $dP = p(x)dx$.

Пример 8.8. Найти объём тела, полученного вращением трапеции, ограниченной линиями $y = f(x) \geq 0$, $x = a$, $x = b$ и осью Ox ($a \geq 0$), вокруг оси Oy .

◀Обозначим искомую величину V_{Oy} . Возьмём произвольное $x \in [a; b]$, дадим ему приращение Δx . Заменим криволинейную трапе-

цию с основанием Δx на прямоугольник с тем же основанием и высотой $f(x)$ (рис.8.9). Прямоугольник отстоит от оси Oy на расстоянии x . При малых Δx объём тела, полученного вращением прямоугольника вокруг оси Oy , выразится приближённо формулой объёма параллелепипеда со сторонами основания $2\pi f(x)$, Δx и высотой $f(x)$: $2\pi x f(x) \Delta x$. Значит, приращение объёма $\Delta V_{Oy} \approx 2\pi x f(x) \Delta x$. Отсюда $dV_{Oy} = 2\pi x f(x) dx$

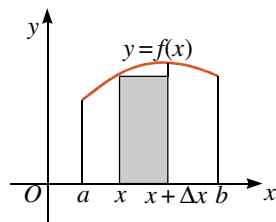


Рис.8.9.

и $V_{Oy} = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$. ►

Пример 8.9. Найти момент инерции относительно оси Ox дуги $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, с линейной плотностью распределения масс $\rho(x)$.

◄Напомним, что момент инерции I материальной точки массы m относительно заданной прямой определяется так: $I = r^2 m$, где r – расстояние от точки до прямой.

Возьмём произвольное $x \in [a; b]$, дадим ему приращение Δx . Заменим дугу кривой на участке $[x; x + \Delta x]$ отрезком касательной, проведенной в точке x (рис.8.10). Длина этого отрезка равна $\frac{\Delta x}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \Delta x$, так как

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \text{ и } \operatorname{tg} \alpha = f'(x) \text{ (рис.8.10).}$$

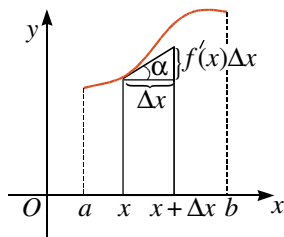


Рис.8.10.

Если функция ρ – непрерывна, а функция f – непрерывно дифференцируема, то на участке $[x; x + \Delta x]$ плотность можно считать постоянной, равной $\rho(x)$, а все точки дуги – находящимися на одном и том же расстоянии $f(x)$ от оси Ox . Таким образом, масса участка дуги приближённо равна $\rho(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \Delta x$ – произведению длины на плотность, а его момент инерции $\Delta I \approx f^2(x) \rho(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \Delta x$.

Отсюда $dI = f^2(x)\rho(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$. Интегрируя, находим момент инерции всей дуги:
$$I = \int_a^b f^2(x)\rho(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx . \blacktriangleright$$

8.6. Кривизна

Одной из важных характеристик формы кривой является её кривизна, характеризующая скорость изменения направления касательной по отношению к пути, пройденному по кривой. Для окружности радиуса R кривизна есть величина постоянная, равная $1/R$ – чем меньше радиус, тем больше кривизна.

Действительно, пусть A – произвольная точка окружности. Возьмём на окружности другую точку B . Изменение направления касательной при переходе от точки A к точке B определяется углом между касательными (его называют *углом смежности*).

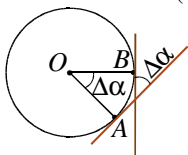


Рис.8.11.

В силу свойств касательной к окружности угол между касательными, проведёнными в точках A и B , равен центральному углу AOB (рис.8.11). Если значение угла AOB равно $\Delta\alpha$, то длина дуги $\widehat{AB}$ равна $R\Delta\alpha$. Следовательно, отношение угла смежности к длине дуги в любой точке окружности постоянно и равно $1/R$.

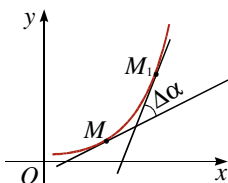


Рис.8.12.

Найдём формулу для вычисления кривизны кривой, заданной уравнением $y = f(x)$ в произвольной точке M с абсциссой x . Будем считать, что функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную.

Возьмём на кривой другую точку M_1 с абсциссой $x + \Delta x$. Пусть $0 \leq \Delta\alpha \leq \pi$ – угол смежности между касательными в точках M и M_1 и

Δs – длина дуги $\widehat{MM_1}$ (рис.8.12). Тогда средняя кривизна на участке $\widehat{MM_1}$ равна $K_{\text{ср}} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$, а кривизна в точке M равна $K = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$.

Предположим, что $\Delta x > 0$ (для случая $\Delta x < 0$ рассуждения аналогичны). Длина участка $\overline{MM_1}$ равна (см. формулу (8.5))

$$\Delta s = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+(f'(t))^2} dt. \text{ Отсюда, по теореме о среднем для интегралов,}$$

$$\Delta s = \sqrt{1+(f'(\gamma))^2} \Delta x, \text{ где } \gamma \in [x; x+\Delta x]. \text{ Так как угол между касательной к кривой и осью абсцисс равен } g(x) = \arctg f'(x), \text{ то угол смежности}$$

$$\Delta \alpha = |g(x+\Delta x) - g(x)|. \text{ Применяя теорему о среднем Лагранжа, находим}$$

$$\Delta \alpha = |g'(\mu) \Delta x|, \text{ где } \mu \in (x; x+\Delta x). \text{ Но, по правилу дифференцирования}$$

$$\text{сложной функции, } g'(\mu) = (\arctg f'(\mu))' \cdot (f'(\mu))' = \frac{f''(\mu)}{1+(f'(\mu))^2}. \text{ Таким образом, кривизна}$$

$$K = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left| \frac{f''(\mu)}{1+(f'(\mu))^2} \Delta x \right|}{\sqrt{1+(f'(\gamma))^2} \Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|f''(\mu)|}{(1+(f'(\mu))^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{|f''(x)|}{(1+(f'(x))^2)^{3/2}}. \quad (8.9)$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то из формулы (8.9) и правила дифференцирования параметрически заданных функций нетрудно получить, что

$$K = \frac{|y'_t x''_{tt} - x'_t y''_{tt}|}{(x'^2_t + y'^2_t)^{3/2}}.$$

Пример 8.10. Найти кривизну параболы $y = x^2$.

$$\blacktriangleleft \text{Находим } y' = 2x \text{ и } y'' = 2. \text{ Следовательно, } K = \frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}.$$

Наибольшую кривизну парабола имеет в начале координат. С возрастанием аргумента кривизна параболы уменьшается. $\blacktriangleright$

9. Функции многих переменных

9.1. Понятие функции многих переменных

Во многих случаях значение некоторой одной величины зависит от совместно принимаемых значений нескольких других величин. Например, площадь S прямоугольника определяется одновременно значениями длины основания a и высоты b прямоугольника, сила притяжения F двух тел зависит от совместных значений масс m_1 , m_2 тел и расстояния r между ними и т.п. Абстрагируясь от конкретных зависимостей, приходят к понятию функции многих переменных.

Пусть D – непустое множество упорядоченных пар (x, y) действительных чисел. Если каждой паре $(x, y) \in D$ поставлено в соответствие действительное число z , то говорят, что на множестве D задана *действительная функция $z = f(x, y)$ двух переменных x и y* (коротко, *функция двух переменных*). Переменные x , y называют *аргументами* (*независимыми переменными*) функции, а z – *зависимой переменной* (*функцией*). Множество D называют *областью определения* функции, а множество E всех значений, которые может принимать переменная z , называют *областью значений* функции. Для функции $z = f(x, y)$, заданной формулой, за область определения часто принимают то множество пар, для которых формула определена.

Аналогично определяется функция $u = f(x, y, z)$ от трёх аргументов x , y , z , а также от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$: $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Далее основные результаты будут излагаться для функций двух и, иногда, трёх переменных. На случай большего числа переменных результаты легко распространить по аналогии.

Упорядоченную пару чисел (x, y) естественно изображать как точку M с координатами (x, y) на плоскости Oxy . Тогда область

определения функции $z = f(x, y)$ будет изображаться как совокупность точек на плоскости.

Пример 9.1. Изобразить область определения функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

◀Область определения задаётся условием $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, т.е. $x^2 + y^2 \leq 1$. Граница области есть кривая $x^2 + y^2 = 1$ – окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Указанному условию удовлетворяют все точки, лежащие как внутри этой окружности, так и на ней самой (рис.9.1,а).▶

Пример 9.2. Изобразить область определения функции $z = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$.

◀В этом случае область определения задаётся неравенством $x^2 + y^2 < 1$. Граница области определения, как и выше, описывается уравнением $x^2 + y^2 = 1$, но её точки уже не принадлежат области определения. Область определения состоит из точек, лежащих *внутри* единичной окружности (рис.9.1,б).▶

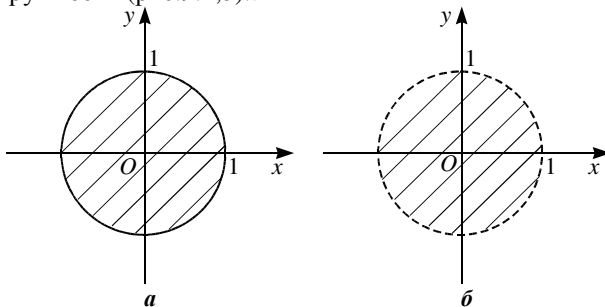


Рис.9.1.

Свойства функции зависят как от характера функциональной зависимости, так и от множества, на котором она рассматривается. В разделе 2 для функций одной переменной было показано, что функция, непрерывная на отрезке, всегда ограничена на нём (см. теорему 2.30), а функция, непрерывная на интервале, уже не обязательно ограничена на интервале (например, функция $f(x) = 1/x$ на интервале $(0; 1)$). В связи

с этим введём аналоги понятий интервала и отрезка для множеств на плоскости.

Определение. Множество точек $M = (x, y)$, удовлетворяющих неравенству $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$, называется *открытым кругом радиуса* $r > 0$ с *центром* в точке $M_0 = (x_0, y_0)$.

Величина $d(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ есть *расстояние на плоскости между точками* M и M_0 . Поэтому открытый круг радиуса r с центром в точке M_0 есть множество точек на плоскости, отстоящих от точки M_0 на расстоянии меньшем, чем r .

Множество точек, удовлетворяющих неравенству $d(M, M_0) \leq r^2$, называется, соответственно, *замкнутым кругом*.

Открытый круг радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в некоторой точке называется *ε -окрестностью этой точки*.

Определение. Точка M называется *внутренней* точкой множества D , если существует ε -окрестность точки M , целиком лежащая в D .

Множество, все точки которого внутренние, называется *открытым*.

Замечание. В вышеприведённых определениях за ε -окрестность точки M_0 вместо открытого круга можно было бы взять, например, открытый квадрат, определяемый неравенствами $|x - x_0| < \varepsilon$, $|y - y_0| < \varepsilon$.

В дальнейшем мы будем рассматривать в основном такие функции, область определения D которых есть либо вся плоскость, либо часть плоскости, ограниченная одной или несколькими непрерывными линиями без самопересечений. Линии, ограничивающие множество D , будем называть *границей* области. Если точка принадлежит границе множества D , то её любая ε -окрестность содержит точки как принадлежащие D , так и не принадлежащие D (например, точка P на рис.9.2). Точки, не лежащие на границе, будут внутренними точками

области определения (например, точка L на рис.9.2) и образуют открытое множество. Если к внутренним точкам присоединить точки границы, то получим *замкнутое множество*. Например, область определения функции $z = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ – открытое

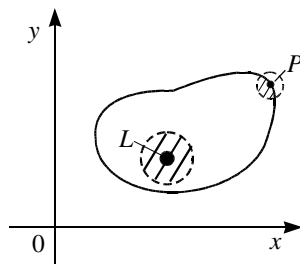


Рис.9.2.

множество, а функции $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ – замкнутое.

Множество всех точек трёхмерного пространства с координатами $(x, y, f(x, y))$, где $(x, y) \in D$, называется *графиком функции* $z = f(x, y)$. График функции двух переменных есть некоторая поверхность S в трёхмерном пространстве (рис.9.3). Например, графиком функции $z = x^2 + y^2$, как известно из аналитической геометрии, будет параболоид вращения (рис.9.4).

Замечание. Для функции трёх переменных можно изобразить область определения в трёхмерном пространстве, но нельзя изобразить график.

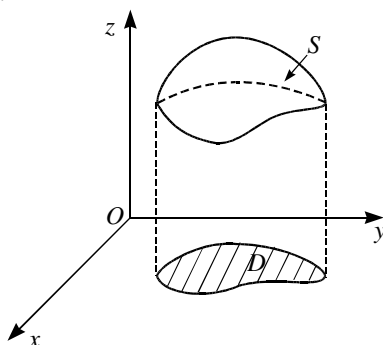


Рис.9.3.

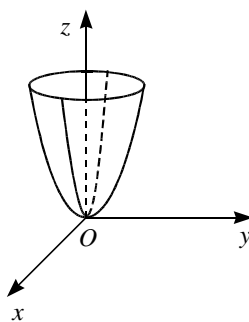


Рис.9.4.

9.2. Предел и непрерывность функции многих переменных

1. Определение предела функции в точке

Пусть функция $f(x, y)$ определена в некотором открытом круге, содержащем точку $M_0 = (x_0, y_0)$, за исключением, быть может, самой точки M_0 .

Определение. Число A называется пределом функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) , если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек (x, y) , удовлетворяющих неравенствам $0 < d(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Данное определение называется *определением предела функции по Коши*.

Если A является пределом функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) , то пишут:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A, \text{ или } \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A, \text{ или } f(x, y) \rightarrow A, \text{ } x \rightarrow x_0,$$

$$y \rightarrow y_0.$$

Сформулируем определение предела функции двух переменных по Гейне, т.е. на языке последовательностей. Сначала дадим определение сходящейся последовательности точек на плоскости.

Определение. Последовательность точек $M_n = (x_n, y_n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, называется сходящейся к точке M_0 , если для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $N_0(\varepsilon) > 0$ такое, что $d(M_n, M_0) < \varepsilon$ как только $n > N_0(\varepsilon)$.

Обозначения: $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M_0$, или $M_n \rightarrow M_0$, $n \rightarrow \infty$.

Определение. Число A называется *пределом функции* $f(x, y)$ в точке M_0 , если для любой последовательности M_n , сходящейся к

M_0 , $M_n \neq M_0$, последовательность значений функции $f(M_n)$ сходится к A .

Отметим, что значения функции $f(M_n)$ образуют обычную числовую последовательность. Поэтому, используя последнее определение, нетрудно заключить, что для предела функции многих переменных сохраняются известные из раздела 2 теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного двух функций.

2. Непрерывность функции в точке

Пусть теперь функция $f(x, y)$ определена в каждой точке некоторого открытого круга с центром в M_0 .

Определение. Функция $f(x, y)$ называется *непрерывной в точке* M_0 , если

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0). \quad (9.1)$$

Данное определение очевидным образом можно сформулировать на « $\varepsilon - \delta$ языке» и «языке последовательностей». Сформулируем определение непрерывности функции в точке в терминах приращений. Величина

$$\Delta z = \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

называется *приращением* функции f в точке (x_0, y_0) (говорят также: *полным приращением*). Функция $z = f(x, y)$ непрерывна в точке (x_0, y_0) , если $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$.

Сумма, разность, произведение и частное непрерывных в точке функций будут также непрерывными функциями в этой точке (в случае частного предполагается, естественно, что знаменатель отличен от нуля в точке). Непрерывной будет сложная функция, если непрерывны функции, её образующие. Но, отметим, что в случае многих переменных при построении сложной функции может изменяться количество переменных. Например, если в функции двух переменных $f(x, y)$ сделать подстановку $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то получим функцию $F(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ одной переменной, а если сделать замену $x = \varphi(t, u, v)$, $y = \psi(t, u, v)$, то

получим $F(t, u, v) = f(\varphi(t, u, v), \phi(t, u, v))$ – функцию трёх переменных.

Если в некоторой точке не выполняется условие непрерывности функции, то эта точка называется *точкой разрыва* функции. Например, функция $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$ имеет разрыв в точке $(0, 0)$, а в остальных точках непрерывна. Точки разрыва могут образовывать линии. Например, для функции $z = \frac{1}{x - y}$ точками разрыва являются все точки прямой $y = x$.

3. Свойства функций, непрерывных на замкнутых ограниченных множествах

Пусть функция $f(x, y)$ определена в каждой точке замкнутой области G и точка $M_0 = (x_0, y_0)$ принадлежит границе G . Для точек границы неприменимо данное выше определение непрерывности функции в точке. В самом деле, условие (9.1) означает, что разность $f(M) - f(M_0)$ должна быть меньше (по модулю) любого наперёд заданного числа для всех точек M из некоторой окрестности точки M_0 . А в любой окрестности точки, принадлежащей границе области G , обязательно есть точки, не принадлежащие G . Поэтому, по аналогии с определением односторонней непрерывности функции одной переменной на концах отрезка $[a; b]$, говорят, что *функция $f(x, y)$ непрерывна в граничной точке M_0 , если $f(M) \rightarrow f(M_0)$, когда M стремится к M_0 , оставаясь в области G .*

Определение. Множество B точек (x, y) называется *ограниченным*, если существует такое число r , что $x^2 + y^2 \leq r^2$, т.е. все точки множества B лежат в круге радиуса r с центром в начале координат.

Ограниченное замкнутое множество называется *компактом*. Компактом является любой круг $x^2 + y^2 \leq r^2$. Компактом будет также окружность $x^2 + y^2 = r^2$.

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в каждой точке компактного множества G , то она обладает свойствами, аналогичными свойствам

непрерывной на отрезке функции одной переменной (см. теоремы 2.30, 2.31, 2.34): 1) $f(x, y)$ ограничена на G ; 2) $f(x, y)$ достигает на G наибольшего и наименьшего значений; 3) $f(x, y)$ равномерно непрерывна на G , т.е. для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(M'') - f(M')| < \varepsilon$ для любых точек $M', M'' \in G$, лишь бы расстояние между ними было меньше δ .

Вместе с тем для произвольного компакта, вообще говоря, не выполняется аналог теоремы 2.33 о промежуточных значениях. Действительно, пусть множество B есть объединение замкнутого круга $x^2 + y^2 \leq 1$ и замкнутого кольца $9 \leq x^2 + y^2 \leq 16$. Тогда B будет компактом. Рассмотрим непрерывную на B функцию $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4$. На B её наименьшее значение $m = -4$, а наибольшее $M = 16$. Но во множестве B не существует точки, в которой $f(x, y)$ равно 0 – промежуточному значению между наименьшим и наибольшим значениями.

Однако, если множество B будет не только компактным, но и связным, т.е. любые его две точки можно соединить непрерывной кривой (в частности, ломаной), целиком принадлежащей ему, то непрерывная на B функция принимает все промежуточные значения между наименьшим и наибольшим значениями.

9.3. Частные производные

1. Определение частных производных

Величина $\Delta_x z = \Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ называется частным приращением функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) по переменной x .

Определение. Частной производной по x функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) называется $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$.

Обозначается частная производная по x одним из символов: z'_x ,

$f'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}$. В отличие от обозначения $\frac{df}{dx}$ производной функции одной переменной выражения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial x}$ всегда будут рассматриваться как единые символы, а не как отношения дифференциалов.

Аналогично определяется частная производная по переменной y .

Частное приращение функции $f(x, y)$ по переменной x в точке (x_0, y_0) есть приращение функции одной переменной $u(x) = f(x, y_0)$ в точке x_0 . Поэтому частная производная $f'_x(x_0, y_0)$ равна «обычной» производной $u'(x_0)$. Значит, чтобы вычислить частную производную f'_x , нужно продифференцировать $f(x, y)$ по переменной x , считая переменную y постоянной, а чтобы вычислить f'_y , нужно продифференцировать $f(x, y)$ по переменной y , считая переменную x постоянной. При этом можно применять все правила вычисления производных функций одной переменной, а также таблицу производных основных элементарных функций. Нужно лишь помнить, по какой переменной берётся производная.

Пример 9.3. Вычислить f'_x и f'_y , если $f(x, y) = x^3 y^4 + 3x^2 + \sin y$.

◀Имеем $f'_x(x, y) = (x^3 y^4)'_x + (3x^2)'_x + (\sin y)'_x$. Так как переменную y считаем константой, то $(x^3 y^4)'_x = y^4 (x^3)'_x = 3x^2 y^4$, $(\sin y)'_x = 0$. Итак, $f'_x(x, y) = 3x^2 y^4 + 6x$. Аналогично находим $f'_y(x, y) = 4x^3 y^3 + \cos y$. ▶

Вышеизложенное переносится и на случай большего числа переменных.

Пример 9.4. Вычислить частные производные функции $f(r, \varphi, \theta) = r \cos \varphi \sin \theta$.

◀ Для этой функции

$$f'_r(r, \varphi, \theta) = \cos \varphi \sin \theta, \quad f'_\varphi(r, \varphi, \theta) = -r \sin \varphi \sin \theta,$$

$$f'_\theta(r, \varphi, \theta) = r \cos \varphi \cos \theta. \blacktriangleright$$

2. Частные производные высших порядков

Пусть частная производная $z'_x(x, y)$ функции $z = f(x, y)$ существует во всех точках некоторой области. Тогда частная производная $z'_x(x, y)$ сама есть функция двух переменных и можно найти (если существуют) её частные производные. Частные производные от частных производных называются *частными производными второго порядка* исходной функции. Аналогично определяются частные производные *третьего порядка* как частные производные от частных производных второго порядка и т.д.

Для функции двух переменных частных производных второго порядка будет четыре:

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (z'_x)'_x, \quad z''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (z'_y)'_y, \quad z''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (z'_x)'_y,$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (z'_y)'_x.$$

Пример 9.5. Вычислить частные производные второго порядка функции $z = x^3 y^4 + 3x^2 + \sin y$.

◀ Используя результаты примера 9.3, находим:

$$z''_{xx} = (3x^2 y^4 + 6x)'_x = 6xy^4 + 6;$$

$$z''_{yy} = (4x^3 y^3 + \cos y)'_y = 12x^3 y^2 - \sin y;$$

$$z''_{xy} = (3x^2 y^4 + 6x)'_y = 12x^2 y^3; \quad z''_{yx} = (4x^3 y^3 + \cos y)'_x = 12x^2 y^3. \blacktriangleright$$

Частные производные второго порядка z''_{xy} и z''_{yx} называются *смешанными*. В рассмотренном примере они совпадают, т.е. результат дифференцирования функции не зависит от порядка дифференцирова-

ния. Оказывается, это не случайно и имеет место следующая теорема о равенстве смешанных производных.

Теорема 9.1. Пусть для функции $z = f(x, y)$ существуют частные производные $z'_x, z'_y, z''_{xy}, z''_{yx}$ в некотором открытом круге с центром в точке (x, y) . Если смешанные производные непрерывны в точке (x, y) , то $z''_{xy}(x, y) = z''_{yx}(x, y)$.

◀Рассмотрим величину

$$A = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) - [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)], \quad (9.2)$$

$$\Delta x, \Delta y \neq 0.$$

Если ввести вспомогательную функцию $u(x) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$, то можно записать $A = u(x + \Delta x) - u(x)$. Функция $u(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x , что вытекает из равенства $u'(x) = f'_x(x, y + \Delta y) - f'_x(x, y)$ и условия существования частных производных функции $f(x, y)$ в открытом круге с центром в точке (x, y) . Следовательно, по теореме о среднем Лагранжа, $A = u'(\gamma_1)\Delta x$, где $u'(\gamma_1) = f'_x(\gamma_1, y + \Delta y) - f'_x(\gamma_1, y)$ и γ_1 лежит между x и $x + \Delta x$. Применяя к разности $f'_x(\gamma_1, y + \Delta y) - f'_x(\gamma_1, y)$ снова теорему Лагранжа, но по переменной y , получим (θ_1 лежит между y и $y + \Delta y$):

$$A = (f'_x(\gamma_1, y + \Delta y) - f'_x(\gamma_1, y))\Delta x = f''_{xy}(\gamma_1, \theta_1)\Delta y\Delta x. \quad (9.3)$$

С другой стороны, полагая $v(y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$, запишем (9.2) в виде: $A = v(y + \Delta y) - v(y)$. Отсюда, как и выше, найдём другое представление для A :

$$A = v'_y(\theta_2)\Delta y = (f'_y(x + \Delta x, \theta_2) - f'_y(x, \theta_2))\Delta y =$$

$$= f''_{yx}(\gamma_2, \theta_2)\Delta x\Delta y, \quad (9.4)$$

где γ_2 лежит между x и $x + \Delta x$, θ_2 — между y и $y + \Delta y$.

Из равенств (9.3) и (9.4) следует, что $f''_{xy}(\gamma_1, \theta_1)\Delta y\Delta x = f''_{yx}(\gamma_2, \theta_2)\Delta x\Delta y$ и $f''_{xy}(\gamma_1, \theta_1) = f''_{yx}(\gamma_2, \theta_2)$. Поэтому, учитывая, что $(\gamma_1, \theta_1) \rightarrow (x, y)$ и $(\gamma_2, \theta_2) \rightarrow (x, y)$ при $\Delta x \rightarrow 0$,

$\Delta y \rightarrow 0$, а смешанные производные непрерывны в точке (x, y) , окончательно получим:

$$f''_{xy}(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f''_{xy}(\gamma_1, \theta_1) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f''_{yx}(\gamma_2, \theta_2) = f''_{yx}(x, y). \blacktriangleright$$

Из данной теоремы вытекает, что смешанные производные любого порядка будут равны, если они непрерывны. Следовательно, если най-

дена, например, производная $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y}$, то найдены (при выпол-

нении условия непрерывности) и производные $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x}$, кото-

рые будут равны $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$.

Отметим, что условие непрерывности смешанных производных существенно для совпадения их. Например, можно показать, что сме-

шанные производные функции $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ явля-
ются разрывными в точке $(0, 0)$ и $f''_{xy}(0, 0) = 0 \neq f''_{yx}(0, 0) = 1$.

9.4. Дифференцируемость функции многих переменных

1. Понятие дифференцируемости и дифференциала

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой в точке (x, y)* , если её полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Delta z &= \Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \\ &= A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \quad \rho \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (9.5)$$

где A, B не зависят от Δx и Δy ; $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ – расстояние между точками (x, y) и $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Замечание. Подчеркнём, что формула (9.5) остаётся верной и при $\Delta x, \Delta y = 0$, если считать $o(\rho) = 0$ для $\rho = 0$.

Определение. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке, то главная линейная относительно Δx и Δy часть приращения функции, т.е. сумма $A\Delta x + B\Delta y$, называется *дифференциалом функции* и обозначается dz, df .

Теорема 9.2. Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y) , то она имеет частные производные в этой точке, причём $f'_x(x, y) = A$, $f'_y(x, y) = B$.

◀ Пусть $\Delta y = 0$, а $\Delta x \neq 0$. Тогда $\Delta_x f(x, y) = A\Delta x + o(|\Delta x|)$, $\Delta x \rightarrow 0$, и

$$f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A\Delta x + o(|\Delta x|)}{\Delta x} = A.$$

Аналогично доказывается, что существует $f'_y(x, y) = B$. ▶

Таким образом, если известно, что функция $z = f(x, y)$ дифференцируема, то её дифференциал $dz = df(x, y) = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$. Отсюда для функций $z = x$ и $z = y$ получаем: $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$. Поэтому дифференциал часто записывают в виде

$$dz = df(x, y) = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy. \quad (9.6)$$

Если $u = f(x, y, z)$ – дифференцируемая функция трёх переменных, то $du = f'_x(x, y, z)dx + f'_y(x, y, z)dy + f'_z(x, y, z)dz$ и т.д. для большего числа переменных.

Для дифференцируемых функций из равенства (9.6) и правил вычисления частных производных следуют формулы для нахождения дифференциалов:

$$d(f \pm g) = df \pm dg; \quad d(fg) = gdf + fdg; \quad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2} \quad (g \neq 0).$$

2. Достаточное условие дифференцируемости

Определение дифференцируемости функции двух переменных аналогично определению дифференцируемости функции одной переменной (см. подразд.3.3). Как и для функций одной переменной из равенства (9.5) очевидно следует, что *дифференцируемая в точке функция обязательно будет непрерывной, а также, по теореме 9.2, будет иметь частные производные в этой точке.*

Но, в отличие от случая одной переменной, дифференцируемость функции двух и более переменных не равнозначна существованию частных производных. Более того, из существования частных производных в точке не следует, вообще говоря, даже непрерывности функции в точке. Например, пусть функция $f(x, y)$ задана следующим образом: $f(x, y) = 1$, если $xy = 0$, и $f(x, y) = 0$, если $xy \neq 0$. В точке $(0, 0)$ приращение $\Delta_x f(0, 0) = f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0) = 1 - 1 = 0$. Поэтому $f'_x(0, 0) = 0$. Аналогично $f'_y(0, 0) = 0$. Но данная функция не является непрерывной в точке $(0, 0)$, так как если взять точку M на биссектрисе 1-го и 3-го координатных углов и устремить её к точке $(0, 0)$, то получим $\lim_{M \rightarrow (0, 0)} f(M) = 0 \neq 1 = f(0, 0)$.

Таким образом, существование частных производных есть необходимое условие дифференцируемости, но не достаточное.

Теорема 9.3 (*достаточное условие дифференцируемости*). Если функция f имеет непрерывные частные производные в точке (x, y) , то она дифференцируема в этой точке, причём $A = f'_x(x, y)$, $B = f'_y(x, y)$.

◀Вычитая и прибавляя слагаемое $f(x, y + \Delta y)$, запишем полное приращение функции в точке (x, y) в виде:

$$\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

К разности $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)$ применим теорему Лагранжа по переменной x , а к разности $f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ – по переменной y :

$$\begin{aligned}\Delta f(x, y) &= f'_x(\gamma, y + \Delta y)\Delta x + f'_y(x, \delta)\Delta y = \\ &= (f'_x(x, y) + \varepsilon_x)\Delta x + (f'_y(x, y) + \varepsilon_y)\Delta y.\end{aligned}\quad (9.7)$$

В равенстве (9.7) частные производные сначала вычисляются в некоторых точках $(\gamma, y + \Delta y)$ и (x, δ) , лежащих в окрестности точки (x, y) , а затем были заменены на значения производных в точке (x, y) с погрешностями ε_x и ε_y соответственно.

Если $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$, то $\varepsilon_x, \varepsilon_y \rightarrow 0$ в силу непрерывности частных производных. Но условие $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ равносильно тому, что $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0$ (катеты стремятся к нулю тогда и только тогда, когда гипотенуза стремится к нулю). Поэтому, учитывая неравенства $\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right| \leq 1$ и $\left|\frac{\Delta y}{\rho}\right| \leq 1$, находим:

$$\left|\frac{\varepsilon_x \Delta x + \varepsilon_y \Delta y}{\rho}\right| \leq |\varepsilon_x| \left|\frac{\Delta x}{\rho}\right| + |\varepsilon_y| \left|\frac{\Delta y}{\rho}\right| \leq |\varepsilon_x| + |\varepsilon_y| \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0.$$

Итак, $\varepsilon_x \Delta x + \varepsilon_y \Delta y = o(\rho)$, $\rho \rightarrow 0$, и равенство (9.7) может быть записано в виде

$$\begin{aligned}\Delta f(x, y) &= f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_x \Delta x + \varepsilon_y \Delta y = \\ &= f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + o(\rho),\end{aligned}$$

т.е. в виде представления (9.5), что и требовалось доказать. ►

Таким образом, *если функция имеет непрерывные частные производные в некоторой открытой области, то она будет дифференцируема во всех точках этой области и её дифференциал вычисляется по формуле (9.6).*

3. Применение дифференциала в приближённых вычислениях

Отбрасывая в равенстве (9.5) слагаемое $o(\rho)$, получаем формулу:

$$\Delta z \approx dz, \quad (9.8)$$

часто используемую для оценки погрешностей при обработке результатов измерений и приближённого вычисления значений функций.

Пример 9.6. При измерении размеров цилиндра были получены следующие данные: диаметр $d = 20$ см ± 2 мм, высота $h = 20$ см ± 2 мм. Оценить погрешность вычисления объема цилиндра.

◀Объем цилиндра $V = \pi r^2 h$. По формуле (9.8) погрешность вычисления объема $\Delta V \approx dV = V'_r \Delta r + V'_h \Delta h = 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h$. Подставляя значения $r = 10$, $\Delta r = 0,1$, $h = 20$, $\Delta h = 0,2$, найдём оценку абсолютной погрешности вычисления объема цилиндра: $|\Delta V| \approx |dV| \leq 2\pi r h |\Delta r| + \pi r^2 |\Delta h| = 60\pi$ (см³). Относительная погрешность $\frac{|dV|}{V} \leq \frac{60\pi}{2000\pi} = 0,03$, т.е. 3% измеряемой величины. ▶

Пример 9.7. Вычислить приближённо $3,2 \cdot 5,9^2$.

◀Положим $f(x, y) = xy^2$, $x_0 = 3$, $y_0 = 6$, $x = 3,2$, $y = 5,9$. Тогда $\Delta x = x - x_0 = 0,2$, $\Delta y = y - y_0 = -0,1$. Из (9.8) имеем

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &\approx f(x_0, y_0) + df = \\ &= f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y. \end{aligned}$$

Следовательно, $3,2 \cdot 5,9^2 \approx x_0 y_0^2 + y_0^2 \Delta x + 2x_0 y_0 \Delta y = 106 + 36 \cdot 0,2 - 36 \cdot 0,1 = 109,6$. Точное значение $3,2 \cdot 5,9^2 = 111,392$. Относительная погрешность вычисления составляет менее 2%. ▶

4. Дифференциалы высших порядков

Дифференциалы высших порядков функции f многих переменных определяются по индукции: $d^2 f = d(df)$, $d^3 f = d(d^2 f)$ и т.д. Предполагая непрерывность частных производных, выведем выражения для дифференциалов высших порядков. Рассмотрим сначала функцию двух переменных $f(x, y)$. В силу определения второго дифференциала и свойств дифференциала находим

$$\begin{aligned} d^2 f(x, y) &= d(df(x, y)) = d(f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy) = \\ &= d(f'_x(x, y))dx + d(f'_y(x, y))dy = \end{aligned}$$

$$= (f''_{xx}(x, y)dx + f''_{xy}(x, y)dy)dx + (f''_{yx}(x, y)dx + f''_{yy}(x, y)dy)dy.$$

Раскрывая скобки и учитывая, что смешанные производные равны, так как непрерывны, окончательно получим:

$$d^2 f(x, y) = f''_{xx}(x, y)dx^2 + 2f''_{xy}(x, y)dxdy + f''_{yy}(x, y)dy^2.$$

Найденная формула напоминает формулу квадрата суммы двух слагаемых. Аналогично доказывается, что дифференциал третьего порядка функции $f(x, y)$ имеет вид куба суммы двух слагаемых

$$d^3 f = f'''_{xxx}dx^3 + 3f'''_{xxy}dx^2dy + 3f'''_{xyy}dxdy^2 + f'''_{yyy}dy^3 \text{ и т.д.}$$

Для функции $f(x, y, z)$ трёх переменных второй дифференциал

$$d^2 f =$$

$$= f''_{xx}dx^2 + f''_{yy}dy^2 + f''_{zz}dz^2 + 2f''_{xy}dxdy + 2f''_{xz}(x, y)dxdz + 2f''_{yz}dydz,$$

т.е. имеет вид формулы квадрата суммы трех слагаемых и т.д.

9.5. Производная сложной функции. Производная неявной функции

1. Производная сложной функции

Пусть задана функция двух переменных $z = f(x, y)$. Если $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, т.е. переменные x и y сами являются функциями некоторой переменной t , то получим сложную функцию одной переменной $z = F(t) = f(\varphi(t), \phi(t))$. Рассмотрим задачу о вычислении производной этой функции.

Теорема 9.4. Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) , а функции $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$ дифференцируемы в точке t_0 , причём $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \phi(t_0)$. Тогда

$$F'(t_0) = f'_x(x_0, y_0)\varphi'(t_0) + f'_y(x_0, y_0)\phi'(t_0). \quad (9.9)$$

Коротко формулу (9.9) записывают так:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \text{ или } z'_t = f'_t = f'_x x'_t + f'_y y'_t. \quad (9.10)$$

◀ Дадим переменной t приращение $\Delta t \neq 0$. Тогда переменные x и y получают приращения $\Delta x = \varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0)$ и $\Delta y = \phi(t_0 + \Delta t) - \phi(t_0)$. Отсюда выразим $\varphi(t_0 + \Delta t) = \varphi(t_0) + \Delta x = x_0 + \Delta x$ и $\phi(t_0 + \Delta t) = \phi(t_0) + \Delta y = y_0 + \Delta y$. Следовательно, приращение функции $F(t) = f(\varphi(t), \phi(t))$ можно записать в виде

$$\Delta F(t_0) = f(\varphi(t_0 + \Delta t), \phi(t_0 + \Delta t)) - f(\varphi(t_0), \phi(t_0)) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Отметим, что $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$, так как функции $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$ дифференцируемы в точке t_0 , а значит, и непрерывны в ней. Поэтому при $\Delta t \rightarrow 0$ величина $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ также стремится к нулю. Но тогда в силу дифференцируемости функции в точке (x_0, y_0)

$$\begin{aligned} \Delta F(t_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + o(\rho). \end{aligned}$$

Запишем $o(\rho)$ как $\varepsilon(\rho)\rho$, где $\varepsilon(\rho) \rightarrow 0$, если $\Delta t \rightarrow 0$, и разделим члены левой и правой частей последнего равенства на $\Delta t \neq 0$. Получим

$$\frac{\Delta F(t_0)}{\Delta t} = f'_x(x_0, y_0) \frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x_0, y_0) \frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon(\rho) \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}.$$

По условию $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi'(t_0)$, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \phi'(t_0)$. Следовательно,

$$F'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta F(t_0)}{\Delta t} = f'_x(x_0, y_0)\varphi'(t_0) + f'_y(x_0, y_0)\phi'(t_0). \blacktriangleright$$

Если x, y зависят не от одной, а нескольких переменных, например, $x = \varphi(t, u, v)$, $y = \phi(t, u, v)$, то аналогично доказывается, что для сложной функции $z = f(\varphi(t, u, v), \phi(t, u, v))$ справедливы следующие формулы дифференцирования:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}; \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}. \quad (9.11)$$

Отметим, что в данных равенствах, в отличие от равенства (9.10), все производные частные.

Пример 9.8. Найти z'_x , если $z = f(x, y)$ и $y = x^2$.

◀ По формуле (9.10) $z'_x = f'_x(x, y)x'_x + f'_y(x, y)y'_x =$
 $= f'_x(x, y) + 2xf'_y(x, y)$. ▶

2. Инвариантность формы дифференциала

Из обоснованного выше правила дифференцирования сложной функции следует свойство инвариантности дифференциала функции многих переменных. В самом деле, пусть, например, $z = f(x, y)$ и $x = \varphi(t, u, v)$, $y = \psi(t, u, v)$. Тогда для дифференциала переменной z , рассматриваемой как функция от независимых переменных t, u, v , имеем $dz = z'_t dt + z'_u du + z'_v dv$. Подставим здесь вместо производных z'_t , z'_u , z'_v правые части равенств (9.11):

$$dz = (z'_x x'_t + z'_y y'_t) dt + (z'_x x'_u + z'_y y'_u) du + (z'_x x'_v + z'_y y'_v) dv.$$

Раскрывая скобки и перегруппировывая слагаемые, получим:

$$dz = z'_x (x'_t dt + x'_u du + x'_v dv) + z'_y (y'_t dt + y'_u du + y'_v dv) = z'_x dx + z'_y dy.$$

Таким образом, формула (9.6), выведенная для случая независимых переменных x и y , верна и в случае, когда переменные x и y являются сами функциями от других переменных. Но, подчеркнём, что в случае зависимых переменных x и y в дифференциале нельзя, вообще говоря, заменять dx и dy на, соответственно, Δx и Δy .

Дифференциалы высших порядков инвариантностью формы не обладают.

3. Производная неявной функции

Рассмотрим уравнение $F(x, y) = 0$. Как отмечалось в подразд. 3.4, оно определяет, вообще говоря, зависимость переменной y от переменной x , которую называют *неявной*. Там же на примере было показано, как можно найти производную этой неявной функции $y = f(x)$ без нахождения явного выражения y через x . Доказанное выше правило для производной сложной функции позволяет получить общую формулу для вычисления производной неявной функции.

Пусть уравнение $F(x, y) = 0$ однозначно разрешимо относительно y в некоторой окрестности точки (x, y) , удовлетворяющей уравнению. Другими словами, в некоторой окрестности точки (x, y) уравнение $F(x, y) = 0$ равносильно уравнению $y = f(x)$, где однозначная функция f определена и дифференцируема на некотором интервале $(x - \delta; x + \delta)$. Можно доказать, что так будет, если функция F и её частные производные F'_x, F'_y непрерывны в открытой области, содержащей точку (x, y) , причём $F'_y(x, y) \neq 0$. На интервале $(x - \delta; x + \delta)$ выполняется тождество $F(x, f(x)) \equiv 0$. Дифференцируя его по переменной x , получим:

$$F'_x(x, f(x)) \cdot x'_x + F'_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0.$$

Отсюда $f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$. Данную формулу обычно записывают так:

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \quad (9.12)$$

где в правой части вместо y должна быть подставлена зависимость y от x .

Таковыми же рассуждениями при аналогичных предположениях заключаем, что частные производные неявной функции $z = f(x, y)$, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$, находятся по формулам

$$z'_x = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad z'_y = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \quad (9.13)$$

9.6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

1. Случай поверхности, заданной явным уравнением

Пусть в области G задана дифференцируемая функция $z = f(x, y)$. Как отмечалось в начале данного раздела, множество точек

$(x, y, f(x, y))$ её графика образует в трёхмерном пространстве некоторую поверхность S . Если точка $M_0 = (x_0, y_0) \in G$, то точка $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$ принадлежит S . Касательной плоскостью к поверхности S в точке P_0 называется плоскость, заданная уравнением

$$z - z_0 = f'_x(M_0)(x - x_0) + f'_y(M_0)(y - y_0). \quad (9.14)$$

Если на поверхности S взять произвольную кривую, проходящую через точку P_0 , и провести к ней касательную прямую в этой точке, то касательная прямая будет лежать в касательной плоскости. Можно было бы определить касательную плоскость к S в точке P_0 как плоскость, содержащую касательные ко всем кривым, проведённым по поверхности через точку P_0 .

Из (9.14) следует, что вектор $\vec{n} = (f'_x(M_0), f'_y(M_0), -1)$ перпендикулярен касательной плоскости. Поэтому уравнение *нормали* к поверхности S в точке P_0 (т.е. прямой, перпендикулярной касательной плоскости к S в точке P_0) имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

2. Случай поверхности, заданной неявным уравнением

Рассмотрим уравнение $F(x, y, z) = 0$. Множество его решений образует некоторую поверхность S . Пусть точка $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ лежит на поверхности S , т.е. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Предположим, что частные производные F'_x , F'_y и F'_z непрерывны в окрестности точки P_0 и хотя бы одна из них отлична от нуля. Пусть, например, $F'_z(P_0) \neq 0$. Тогда хотя бы часть поверхности S , содержащую точку P_0 , можно описать явной дифференцируемой функцией $z = f(x, y)$, определённой в окрестности точки $M_0 = (x_0, y_0)$. Уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной явно, имеет вид (см. формулу (9.14)):

$$z - z_0 = f'_x(M_0)(x - x_0) + f'_y(M_0)(y - y_0),$$

где, по формулам (9.13) для частных производных неявной функции,

$$f'_x(M_0) = -\frac{F'_x(P_0)}{F'_z(P_0)}, \quad f'_y(M_0) = -\frac{F'_y(P_0)}{F'_z(P_0)}.$$

Поэтому уравнение касательной плоскости к поверхности S , заданной неявным уравнением,

можно записать так:

$$F'_x(P_0)(x - x_0) + F'_y(P_0)(y - y_0) + F'_z(P_0)(z - z_0) = 0, \quad (9.15)$$

а уравнение нормали:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(P_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(P_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(P_0)}. \quad (9.16)$$

Такие же уравнения мы получим, если предположить, что $F'_x(P_0) \neq 0$ или $F'_y(P_0) \neq 0$. В этих случаях часть поверхности S можно описать уравнением $x = g(y, z)$ или $y = h(x, z)$ соответственно. Если же все три частных производных обращаются в нуль в точке P_0 , то вышеприведённые рассуждения применить нельзя. Такие точки называются *особыми точками поверхности* S . В особых точках поверхность может и не иметь касательной плоскости и, соответственно, нормали.

Пример 9.9. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к конусу $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (рис.9.5) в точке $P_0 = (4, 3, 5)$.

◀Найдём частные производные функции

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 \text{ в точке } P_0 = (4, 3, 5):$$

$$F'_x(P_0) = 8, \quad F'_y(P_0) = 6, \quad F'_z(P_0) = -10.$$

Следовательно, по формулам (9.15), (9.16) уравнение касательной плоскости имеет вид

$$4(x - 4) + 3(y - 3) - 5(z - 5) = 0, \quad \text{или} \quad 4x +$$

$$+ 3y - 5z = 0, \quad \text{а уравнение нормали: } \frac{x - 4}{4} =$$

$$= \frac{y - 3}{3} = \frac{z - 5}{-5}. \quad \text{Отметим, что в точке } (0, 0, 0)$$

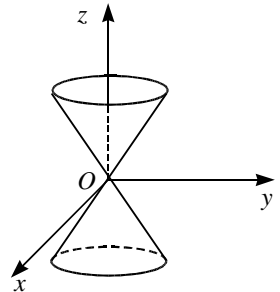


Рис.9.5.

все частные производные одновременно равны нулю, и в этой точке, являющейся вершиной конуса, не существуют

9.7. Производная по направлению. Градиент

1. Определение производной по направлению

С физической точки зрения частная производная $f'_x(x, y, z)$ характеризует скорость изменения функции при движении вдоль прямой, проходящей через точку $P = (x, y, z)$ параллельно координатной оси Ox . Аналогично частные производные по y и z характеризуют скорость изменения функции вдоль направлений, параллельных осям Oy и Oz соответственно. Вместе с тем во многих физических задачах важно знать скорость изменения функции по направлениям, отличным от координатных. В связи с этим дадим определение производной по направлению и способ её вычисления, если задано направление и известны частные производные.

Пусть направление задано *единичным* вектором $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, где α, β, γ – углы, которые вектор $\vec{n}$ составляет с осями Ox, Oy и Oz . Отметим, что $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. Множество точек $P_t = (x + t \cos \alpha, y + t \cos \beta, z + t \cos \gamma)$, $t \geq 0$, является лучом, выходящим из точки P в направлении вектора $\vec{n}$. Расстояние между точками P_t и P равно t .

Определение. Производной функции f в точке P по направлению вектора $\vec{n}$ называется число

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(P_t) - f(P)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x + t \cos \alpha, y + t \cos \beta, z + t \cos \gamma) - f(x, y, z)}{t}. \end{aligned}$$

Из определения следует, что значение производной по направлению функции f в точке P совпадает со значением производной в нуле сложной функции $\phi(t) = f(x + t \cos \alpha, y + t \cos \beta, z + t \cos \gamma)$:

$$\frac{\partial f(P)}{\partial \vec{n}} = \phi'(0).$$

Если функция f дифференцируема, то (см. формулу (9.10))

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= f'_x(P_t)x'_t + f'_y(P_t)y'_t + f'_z(P_t)z'_t = \\ &= f'_x(P_t)\cos\alpha + f'_y(P_t)\cos\beta_t + f'_z(P_t)\cos\gamma.\end{aligned}$$

Полагая $t=0$, получаем формулу для вычисления производной по направлению:

$$\frac{\partial f(P)}{\partial \vec{n}} = f'_x(P)\cos\alpha + f'_y(P)\cos\beta + f'_z(P)\cos\gamma. \quad (9.17)$$

Для дифференцируемой функции двух переменных $f(x, y)$ формула вычисления производной по направлению $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ в точке $P = (x, y)$ имеет вид:

$$\frac{\partial f(P)}{\partial \vec{n}} = f'_x(P)\cos\alpha + f'_y(P)\cos\beta.$$

Пример 9.10. Найти производную функции $u = 2x^2 + y^2$ в точке $P = (1, 1)$ по направлению вектора $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.

◀Модуль вектора $\vec{a}$ равен 5. Единичным вектором, совпадающим по направлению с вектором $\vec{a}$, будет вектор $\vec{n} = (3/5, 4/5)$. Найдём частные производные функции u в точке P : $u'_x(P) = 4$, $u'_y(P) = 2$. Следовательно,

$$\frac{\partial u(P)}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}} = \frac{3}{5} \cdot 4 + \frac{4}{5} \cdot 2 = 4. \blacktriangleright$$

2. Градиент

Введём вектор $\text{grad } f(P) = (f'_x(P), f'_y(P), f'_z(P))$, называемый *градиентом функции f в точке P* . Правую часть формулы (9.17) можно рассматривать как скалярное произведение *единичного* вектора $\vec{n}$ и вектора $\text{grad } f(P)$:

$$\frac{\partial f(P)}{\partial \vec{n}} = (\text{grad } f(P), \vec{n}) = |\text{grad } f(P)| \cos\varphi, \quad (9.18)$$

где φ — угол между векторами $\vec{n}$ и $\text{grad } f(P)$. Из равенства (9.18) сле-

дует, что если $\text{grad } f(P) = \vec{0}$, то значение производной по любому направлению в точке P равно нулю. Если $\text{grad } f(P) \neq \vec{0}$, то $\frac{\partial f(P)}{\partial \vec{n}} < |\text{grad } f(P)|$ для любого направления $\vec{n}$, за исключением направления, совпадающего с направлением градиента. Таким образом, геометрическая и физическая характеристики градиента состоят в том, что *градиент – это вектор, обладающий следующими двумя свойствами: 1) длина (модуль) градиента равна максимальной величине производной по направлению в данной точке; 2) направление градиента совпадает с направлением наискорейшего возрастания функции.* Данные два свойства можно было бы принять за определение градиента.

3. Линии уровня и поверхности уровня

Множество точек плоскости Oxy таких, что $f(x, y) = C$, называется *линией уровня* функции двух переменных $f(x, y)$. По линиям уровня, построенным на плоскости, можно составить представление о виде трёхмерной поверхности – графике функции $f(x, y)$.

Покажем, что *градиент функции всегда расположен перпендикулярно линии уровня*. Действительно, пусть точка $P_0 = (x_0, y_0)$ лежит на линии уровня $f(x, y) - C = 0$ и, например, $f'_y(P_0) \neq 0$. Угловым коэффициентом касательной к линии уровня в точке P_0 равен $y'_x = -\frac{f'_x(P_0)}{f'_y(P_0)}$

(см. формулу (9.12)). Следовательно, уравнение касательной к линии уровня имеет вид $y - y_0 = -\frac{f'_x(P_0)}{f'_y(P_0)}(x - x_0)$. Переписав его в виде общего уравнения прямой $f'_x(P_0)(x - x_0) + f'_y(P_0)(y - y_0) = 0$, заключаем, что вектор $\text{grad } f(P_0) = (f'_x(P_0), f'_y(P_0))$ перпендикулярен касательной.

Аналогично определяется *поверхность уровня* для случая функции трёх переменных $f(x, y, z)$ как множество точек пространства $Oxyz$, в которых $f(x, y, z) = C$. Из формулы (9.16) для нормали к поверхности,

заданной неявным уравнением, вытекает, что *градиент функции $f(x, y, z)$ расположен перпендикулярно поверхности уровня.*

Пример 9.11. Найти и изобразить линию уровня и градиент функции $u = 2x^2 + y^2$ в точке $P = (1, 1)$.

◀Имеем $\text{grad } u(P) = (u'_x(P), u'_y(P)) = (4, 2)$. Линия уровня заданной функции будет проходить через точку P , если $C = u(P) = 3$. Таким образом, искомая линия уровня имеет уравнение $2x^2 + y^2 = 3$ – эллипс с центром в начале координат и полуосями $a = \sqrt{3/2}$, $b = \sqrt{3}$ (рис.9.6).▶

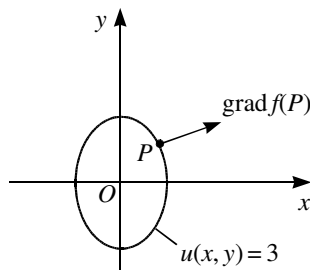


Рис.9.6.

9.8. Формула Тейлора для функции многих переменных

Рассмотрим функцию $f(x, y)$, заданную в открытом круге G с центром в точке $P_0 = (x_0, y_0)$. Будем считать, что функция имеет непрерывные частные производные до порядка $(n+1)$ включительно в этом круге. Докажем, что для всех точек $P = (x, y) \in G$ справедливо разложение

$$f(P) = f(P_0) + df(P_0) + \frac{d^2 f(P_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(P_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(P_\gamma)}{(n+1)!}, \quad (9.19)$$

называемое *формулой Тейлора для функции f с остаточным членом в форме Лагранжа* или *разложением функции по степеням $x - x_0$ и $y - y_0$* . Точка P_γ лежит на отрезке, соединяющем точки P_0 и P .

◀Представим: $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$. Запишем параметрические уравнения отрезка, соединяющего точки P_0 и P : $x = x_0 + t\Delta x$, $y = y_0 + t\Delta y$, $0 \leq t \leq 1$. Данный отрезок целиком лежит в круге, в котором функция f имеет непрерывные частные производные до $(n+1)$ -го порядка. Функции $x = x_0 + t\Delta x$, $y = y_0 + t\Delta y$ по переменной t диффе-

ренцируемы любое число раз. Поэтому функция *одной* переменной $\varphi(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$ на отрезке $[0;1]$ дифференцируема $(n+1)$ раз и, следовательно, для неё можно написать разложение по формуле Тейлора (4.8)

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0) \cdot t + \frac{\varphi''(0)}{2!} t^2 + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} t^n + \frac{\varphi^{(n+1)}(\gamma)}{(n+1)!} t^{n+1},$$

$$0 < \gamma < t.$$

Отсюда для $t=1$ получаем

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\gamma)}{(n+1)!}, \quad 0 < \gamma < 1. \quad (9.20)$$

По формуле (9.10) производной сложной функции вычисляем

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= f'_x x'_t + f'_y y'_t = \\ &= f'_x(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta x + f'_y(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta y. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Значит, $\varphi'(0) = f'_x(P_0)\Delta x + f'_y(P_0)\Delta y = df(P_0)$. Дифференцируя (9.21), найдём:

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= f''_{xx}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta x\Delta y + \\ &\quad + f''_{yy}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta y^2 \end{aligned}$$

и $\varphi''(0) = d^2 f(P_0)$. Аналогично доказывается, что $\varphi^{(k)}(0) = d^k f(P_0)$, $k \leq n$, и $\varphi^{(n+1)}(\gamma) = d^{n+1} f(P_\gamma)$.

Подставляя найденные выражения для производных функции φ в нуле и $\varphi(1) = f(P)$, $\varphi(0) = f(P_0)$ в равенство (9.20), получим формулу (9.19). ►

В форме (9.19) формула Тейлора сохраняет силу для случая функции трёх и более переменных.

При развёрнутой записи дифференциалов формула Тейлора становится более громоздкой. Например, при $n=1$ для функции двух переменных

$$f(x, y) = f(P_0) + f'_x(P_0)\Delta x + f'_y(P_0)\Delta y + \frac{f''_{xx}(P_\gamma)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(P_\gamma)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(P_\gamma)\Delta y^2}{2}.$$

9.9. Экстремумы функции многих переменных

Определение. Точка (x_0, y_0) называется *точкой локального максимума (минимума) функции* $f(x, y)$, если существует открытый круг с центром в точке (x_0, y_0) такой, что для всех точек (x, y) из этого круга $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ (соответственно $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$).

Для функции трёх переменных $f(x, y, z)$ соответствующее неравенство должно выполняться в некотором открытом шаре с центром в точке (x_0, y_0, z_0) .

Значение функции в точке локального максимума (минимума) называют *локальным максимумом (минимумом)*. Локальные максимумы и минимумы объединяют общим термином *локальные экстремумы*. Отметим, что слово «локальный» часто опускают. Очевидно, что данное выше определение локального экстремума равносильно требованию *сохранения знака приращением функции в некоторой окрестности точки локального экстремума*.

1. Необходимые условия экстремума

Теорема 9.5. Если дифференцируемая функция имеет в точке локальный экстремум, то все её частные производные в этой точке равны нулю.

◀ Пусть точка (x_0, y_0) является, например, точкой локального максимума функции $f(x, y)$, т.е. выполняется неравенство $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ в некотором открытом круге G с центром в точке (x_0, y_0) . Рассмотрим функцию *одной* переменной $g(x) = f(x, y_0)$. Тогда для всех точек x интервала, являющегося проекцией G на ось Ox , выполняется неравенство $g(x) = f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) = g(x_0)$.

Значит, точка x_0 дифференцируемой функции $g(x)$ является точкой локального максимума. Следовательно, $g'(x_0)=0$ и $f'_x(x_0, y_0) = g'(x_0)$ также равна нулю.

Аналогично доказывается, что и $f'_y(x_0, y_0)=0$. ►

Теорема 9.5 означает, что для дифференцируемой функции в точках экстремума градиент равен нулю. Этот вывод нетрудно сделать из геометрического и физического смысла градиента: если бы градиент в точке экстремума был бы отличен от нуля, то, двигаясь по направлению градиента, можно было бы значение функции увеличить по сравнению с точкой экстремума и уменьшить, двигаясь по направлению, противоположному градиенту.

Точка, в которой все частные производные одновременно равны нулю, называется *стационарной*.

Для дифференцируемой функции всякая экстремальная точка является стационарной. Однако не всякая стационарная точка является экстремальной. Например, для функции $f(x, y) = xy$ частные производ-

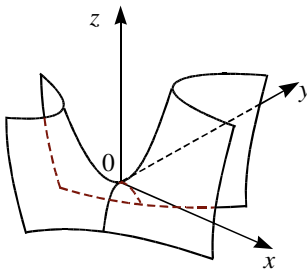


Рис.9.7.

ные $f'_x = y$ и $f'_y = x$ одновременно равны нулю в точке $(0,0)$. Но точка $(0,0)$ не является точкой экстремума, так как в любой её окрестности приращение функции не сохраняет знак: $\Delta f(0,0) > 0$, если $\Delta x, \Delta y > 0$, и $\Delta f(0,0) < 0$, если $\Delta x, \Delta y < 0$. График этой функции изображён на рис.9.7. Стационарные точки, не являющиеся экстремальными, называют *седловыми*.

2. Достаточные условия экстремума

В данном пункте будут сформулированы достаточные условия экстремума функции и рассмотрены основные этапы их обоснования.

Пусть точка $P_0 = (x_0, y_0)$ является стационарной точкой функции $f(x, y)$. Предположим, что в окрестности точки P_0 функция имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно.

Сначала представим приращение функции в стационарной точке через второй дифференциал. Так как $df(P_0) = 0$, то по формуле Тейлора (9.19)

$$\Delta f(P_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(P_0) = \frac{1}{2} d^2 f(P_0) + \frac{1}{6} \left(f'''_{xx}(P_0) \Delta x^3 + 3f'''_{xy}(P_0) \Delta x^2 \Delta y + 3f'''_{yx}(P_0) \Delta x \Delta y^2 + f'''_{yy}(P_0) \Delta y^3 \right).$$

Каждое слагаемое в скобках есть $o(\rho^2)$ при $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ (напомним, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$). Действительно, например, для второго слагаемого:

$$\left| \frac{\Delta x^2 \Delta y}{\rho^2} \right| = \left| \frac{\Delta x}{\rho} \right| \cdot \left| \frac{\Delta y}{\rho} \right| \cdot |\Delta x| \leq |\Delta x| \rightarrow 0 \quad (\text{учтено, что } \left| \frac{\Delta x}{\rho} \right| \leq 1 \text{ и } \left| \frac{\Delta y}{\rho} \right| \leq 1).$$

Следовательно,

$$\Delta f(P_0) = \frac{1}{2} d^2 f(P_0) + \varepsilon(\rho) \rho^2, \quad \varepsilon(\rho) \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow 0. \quad (9.22)$$

Отметим, что $d^2 f(P_0)$ также стремится к нулю при $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$.

Но естественно предположить, что $d^2 f(P_0)$ стремится к нулю со скоростью $\pm \rho^2$. Тогда из (9.22) будет следовать, что знак приращения функции в стационарной точке определяется знаком второго дифференциала. Обоснуем, когда справедливо это предположение, и укажем способ определения знака второго дифференциала.

Имеем

$$\begin{aligned} d^2 f(P_0) &= f''_{xx}(P_0) \Delta x^2 + 2f''_{xy}(P_0) \Delta x \Delta y + f''_{yy}(P_0) \Delta y^2 = \\ &= \rho^2 \left(a_{11} u^2 + 2a_{12} uv + a_{22} v^2 \right), \end{aligned}$$

где для сокращения записи введены обозначения:

$$a_{11} = f''_{xx}(P_0), \quad a_{12} = f''_{xy}(P_0), \quad a_{22} = f''_{yy}(P_0), \quad u = \Delta x / \rho, \quad v = \Delta y / \rho.$$

Таким образом, знак второго дифференциала определяется знаком выражения $A(u, v) = a_{11} u^2 + 2a_{12} uv + a_{22} v^2$, являющегося квадратичной формой относительно переменных u, v .

Теорема 9.6 (достаточные условия экстремума). Если квадратичная форма $A(u, v)$ является:

1) положительно определённой, т.е. $A(u, v) > 0$ для любых u, v , одновременно не равных нулю, то функция f имеет в точке P_0 локальный минимум;

2) отрицательно определённой, т.е. $A(u, v) < 0$ для любых u, v , одновременно не равных нулю, то функция f имеет в точке P_0 локальный максимум.

◀Заметим, что $u^2 + v^2 = \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 1$ для любых $\Delta x, \Delta y$, одновременно не равных нулю. Квадратичная форма $A(u, v)$ как непрерывная функция переменных u, v достигает на единичной окружности минимального и максимального значений. Поэтому, если квадратичная форма положительно определена, то существует число $\alpha > 0$ такое, что $A(u, v) \geq \alpha$ для всех $u^2 + v^2 = 1$. Следовательно, из формулы (9.22)

$$\Delta f(P_0) = \frac{1}{2} \rho^2 A(u, v) + \varepsilon(\rho) \rho^2 \geq \rho^2 \left(\frac{1}{2} \alpha + \varepsilon(\rho) \right) > 0$$

для всех достаточно малых $\Delta x, \Delta y$, одновременно не равных нулю, поскольку $\varepsilon(\rho) \rightarrow 0$. Таким образом, приращение $\Delta f(P_0) > 0$ в некоторой окрестности точки P_0 (исключая саму точку), что и означает, что P_0 – точка локального минимума функции. Аналогично рассматривается случай $A(u, v) < 0$. ▶

Подобным же образом доказывается следующая теорема, обосновывающая отсутствие экстремума в стационарной точке.

Теорема 9.7. Если квадратичная форма может принимать разные знаки, т.е. существуют векторы (u_1, v_1) и (u_2, v_2) такие, что $A(u_1, v_1) > 0$, а $A(u_2, v_2) < 0$, то функция f не имеет экстремума в точке P_0 .

Знак квадратичной формы можно установить с помощью критерия Сильвестра*, доказываемого в курсе линейной алгебры. Для его применения для каждой стационарной точки P_0 составляется матрица квадра-

тичной формы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, где $a_{11} = f''_{xx}(P_0)$, $a_{12} = a_{21} = f''_{xy}(P_0)$, $a_{22} = f''_{yy}(P_0)$.

Если угловые миноры матрицы $\Delta_1 = a_{11} > 0$ и $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$,

то квадратичная форма является положительно определённой и в стационарной точке функция имеет локальный минимум.

Если $\Delta_1 < 0$, а $\Delta_2 > 0$, то квадратичная форма является отрицательно определённой и в стационарной точке функция имеет локальный максимум.

Если $\Delta_2 < 0$, то квадратичная форма не является знакоопределённой и в стационарной точке функция не имеет экстремума.

Пример 9.12. Найти экстремумы функции $u = \frac{x^3}{3} + x^2 - y^2 - 2xy$.

◀Составляем систему уравнений для нахождения стационарных точек: $u'_x = x^2 + 2x - 2y = 0$, $u'_y = -2y - 2x = 0$. Решая её, находим две стационарные точки: $P_1 = (0, 0)$ и $P_2 = (-4, 4)$.

Вычисляем частные производные второго порядка: $u''_{xx} = 2x + 2$, $u''_{yy} = -2$, $u''_{xy} = -2$.

Составляем матрицу для точки P_1 : $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. Для неё

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0$. Следовательно, экстремума в точке P_1 нет. Со-

* Сильвестр Джеймс Джозеф (1814–1897) – английский математик.

ставляем матрицу для точки $P_2: \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. Для неё $\Delta_1 = -6 < 0$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 8 > 0. \text{ Следовательно, функция имеет локальный мак-}$$

симум в точке P_2 , а именно: $u_{\max} = u(-4, 4) = 32/3$. ►

Аналоги теорем 9.6, 9.7 справедливы и в случае функций $n > 2$ переменных. Знак квадратичной формы в стационарной точке также определяется с помощью критерия Сильвестра. Матрица квадратичной формы составляется из частных производных второго порядка и имеет размер $n \times n$ (см. ниже пример 9.13). Матрица будет симметрической, так как смешанные производные (если непрерывны) равны.

Если все угловые миноры матрицы положительные, то в стационарной точке функция имеет локальный минимум. Если угловые миноры последовательно меняют знак, начиная со знака минус, то в стационарной точке функция имеет локальный максимум. Экстремума нет при любой другой последовательности знаков угловых миноров.

Замечание. Если наблюдается сохранение последовательности знаков угловых миноров, но есть миноры с нулевыми значениями, то необходимо проводить дополнительное исследование на наличие экстремума в стационарной точке.

Пример 9.13. Найти экстремумы функции

$$u = -2x^2 - 3y^2 - z^2 + 2xz + 2yz + 2y + 3.$$

◄Составляем систему уравнений для нахождения стационарных точек:

$$u'_x = -4x + 2z = 0, \quad u'_y = -6y + 2z + 2 = 0, \quad u'_z = -2z + 2x + 2y = 0.$$

Решая её, находим стационарную точку: $P = (1, 1, 2)$. Составляем матрицу из вторых частных производных:

$$\begin{pmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{yx} & u''_{yy} & u''_{yz} \\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем угловые миноры: $\Delta_1 = -4 < 0$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 24 > 0$;

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0. \text{ Следовательно, в точке } (1, 1, 2) \text{ функция}$$

имеет локальный максимум, а именно $u_{\max} = u(1, 1, 2) = 4$. ►

9.10. Условный экстремум

Часто требуется найти экстремум функции многих переменных при условии, что переменные связаны дополнительными соотношениями, называемыми *условиями связи*. В таких случаях говорят об условном экстремуме функции.

Рассмотрим эту задачу в случае функции двух переменных $f(x, y)$ и одного условия связи вида $\varphi(x, y) = 0$.

Определение. Точка (x_0, y_0) называется *точкой условного локального максимума (минимума) функции $f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$* , если существует открытый круг с центром в точке (x_0, y_0) такой, что для всех точек (x, y) из этого круга, удовлетворяющих условию $\varphi(x, y) = 0$, выполняется неравенство $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ (соответственно $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$).

Если разрешить уравнение связи относительно одной переменной и подставить полученное решение в функцию $f(x, y)$, то задача на условный экстремум сведётся к задаче на нахождение безусловного экстремума функции одной переменной. Однако не всегда просто разрешить уравнение связи. Поэтому применяют другой метод, называемый *методом множителей Лагранжа*. Он часто более эффективен даже в том случае, когда уравнение связи легко разрешается относительно какой-то переменной. Метод основан на следующей идее, вытекающей из геометрического и физического смысла градиента. Если P_0 – точка локального условного экстремума, то в ней градиенты функций f и φ

должны быть коллинеарны, т.е. должно существовать число λ такое, что

$$\text{grad } f(P_0) = (f'_x(P_0), f'_y(P_0)) = (\lambda \varphi'_x(P_0), \lambda \varphi'_y(P_0)) = \lambda \text{grad } \varphi(P_0).$$

В самом деле (рис.9.8), $\text{grad } f(P_0)$ перпендикулярен линии уровня

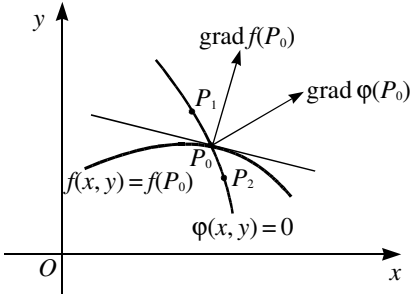


Рис.9.8.

функции f , проходящей через точку P_0 . Значение функции f не изменяется, если двигаться по линии уровня функции f , т.е. при малых приращениях аргументов перпендикулярно $\text{grad } f(P_0)$. Значение функции f будет увеличиваться, если двигаться по направлению, составляющему острый угол с $\text{grad } f(P_0)$, и будет

уменьшаться, если двигаться по направлению, составляющему тупой угол с $\text{grad } f(P_0)$. Следовательно, если бы $\text{grad } f(P_0) \neq \lambda \text{grad } \varphi(P_0)$, то, при малых приращениях аргументов, нашлись бы точки P_1 и P_2 на кривой $\varphi(x, y) = 0$ такие, что $f(P_1) > f(P_0)$ и $f(P_2) < f(P_0)$.

Из условия коллинеарности градиентов вытекает способ нахождения точек возможного условного экстремума.

Составляем функцию Лагранжа $L(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$, где число λ называется множителем Лагранжа. Если P_0 – точка локального условного экстремума, то существует число λ_0 такое, что тройка (x_0, y_0, λ_0) является решением системы из трёх уравнений

$$L'_x = 0, L'_y = 0, \varphi(x, y) = 0 \quad (9.23)$$

с тремя неизвестными x, y, λ . Будет ли решение системы действительно точкой экстремума, причём точкой максимума или минимума, выясняется на основании исследования знака $d^2 L(x_0, y_0; \lambda_0)$ при условии, что дифференциалы переменных x, y связаны соотношением $\varphi'_x(P_0)dx + \varphi'_y(P_0)dy = 0$. А именно, функция имеет условный мини-

мум, если $d^2L(x_0, y_0; \lambda_0) > 0$, и условный максимум, если $d^2L(x_0, y_0; \lambda_0) < 0$.

Аналогично находится условный экстремум в случае функции трёх и большего числа переменных при наличии одного или нескольких уравнений связи (число уравнений связи должно быть меньше числа переменных).

Пример 9.14. Найти наименьшее значение суммы двух положительных чисел, если их произведение равно 16.

◀Обозначим искомые числа x и y . Тогда задача сведётся к поиску минимума функции $f(x, y) = x + y$ при условии, что $\Phi(x, y) = xy - 16 = 0$. Составляем функцию Лагранжа $L(x, y; \lambda) = x + y + \lambda(xy - 16)$ и систему уравнений вида (9.23):

$$L'_x = 1 + \lambda y = 0; \quad L'_y = 1 + \lambda x = 0; \quad xy - 16 = 0.$$

Система имеет два решения: 1) $x_1 = y_1 = 4$, $\lambda_1 = -1/4$; 2) $x_2 = y_2 = -4$, $\lambda_2 = 1/4$. Условию положительности чисел удовлетворяет первое решение.

Исследуем второй дифференциал функции Лагранжа для точки $P_1 = (4, 4)$ и $\lambda_1 = -1/4$ при условии, что $\Phi'_x(P_1)dx + \Phi'_y(P_1)dy = 4dx + 4dy = 0$, т.е. $dy = -dx$. Если $dy = -dx$, то $d^2L(4, 4; -1/4) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) dx dy = \frac{1}{2} dx^2 > 0$. Следовательно, в точке P_1 функция имеет условный минимум. Таким образом, число 8 есть наименьшее значение суммы двух положительных чисел, произведение которых равно 16. ►

10. Кратные интегралы

10.1. Понятие двойного интеграла

В разделе 8 приведены примеры использования определённого интеграла для вычисления объёма и площади поверхности тела вращения. В некоторых случаях определённый интеграл можно использовать для вычисления массы, центра тяжести тела вращения с неоднородной плотностью распределения масс. Но для тела, не являющегося телом вращения, вычисление таких величин с помощью определённого интеграла может представлять значительные сложности. Вычисления могут быть существенно упрощены при применении кратных интегралов – двойных и тройных.

1. Определение двойного интеграла для прямоугольной области

Пусть функция $f(x, y)$ определена в замкнутом прямоугольнике $\Pi = [a; b] \times [c; d]$. Разобьём отрезок $[a; b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, а отрезок $[c; d]$ – на m частей точками $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$. Проведя прямые $x = x_i$, $y = y_j$, получим разбиение T прямоугольника Π на nm прямоугольников $\Pi_{ij} = [x_i; x_{i+1}] \times [y_j; y_{j+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, $j = 0, 1, \dots, m-1$ (рис.10.1). Возьмём в каждом прямоугольнике Π_{ij} точку $P_{ij} = (u_i, v_j)$ и составим двумерную интегральную сумму

$$V_T = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(P_{ij}) \Delta S_{ij} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(u_i, v_j) \Delta x_i \Delta y_j,$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$; $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$; $u_i \in [x_i; x_{i+1}]$, $v_j \in [y_j; y_{j+1}]$; $\Delta S_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$ – площадь прямоугольника Π_{ij} .

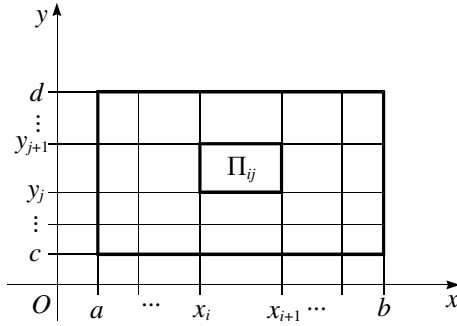


Рис.10.1.

Длина диагонали прямоугольника Π_{ij} равна $\lambda_{ij} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_j^2}$. Максимальная из длин λ_{ij} называется *мелкостью* (диаметром) λ_T разбиения T .

Определение. Число I называется *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по прямоугольнику Π , если для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что для любого разбиения T с мелкостью разбиения $\lambda_T < \delta$ выполняется неравенство

$$|V_T(f) - I| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(P_{ij}) \Delta S_{ij} - I \right| < \varepsilon$$

при любом выборе точек P_{ij} .

Обозначают двойной интеграл так: $\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy$. Таким обра-

зом, по определению,

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy = \lim_{\lambda_T \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(P_{ij}) \Delta S_{ij} = \lim_{\lambda_T \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(u_i, v_j) \Delta x_i \Delta y_j.$$

Можно доказать, что двойной интеграл существует для любой функции, непрерывной в прямоугольнике.

2. Определение двойного интеграла для произвольной области

Пусть область G ограничена замкнутой кривой без самопересечений. Функцию $f(x, y)$ считаем ограниченной и определённой на G и её границе. Понятие двойного интеграла по области G можно ввести следующими способами.

1-й способ. Так как G – ограниченное множество, то существует прямоугольник $\Pi = [a; b] \times [c; d]$, целиком содержащий область G . Разбивая, как и выше, отрезки $[a; b]$ и $[c; d]$ на части точками

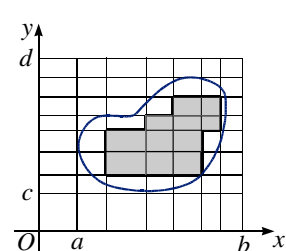


Рис.10.2.

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$ и проведя прямые $x = x_i$, $y = y_j$, получим на плоскости Oxy сетку, наложенную на область G . Наложение её на область порождает три вида малых прямоугольников: 1) целиком содержащихся в области G ; 2) имеющих общие точки с G , но целиком в ней не содержащихся; 3) не имеющих общих точек с G (рис.10.2).

В каждом прямоугольнике Π_{kl} первого вида выберем по точке P_{kl} и составим двумерную интегральную сумму

$$V_T = \sum f(P_{kl}) \Delta x_k \Delta y_l, \quad (10.1)$$

где суммирование распространяется на прямоугольники первого вида. Предел сумм V_T при $\lambda_T \rightarrow 0$, если он существует, называется *двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области G* .

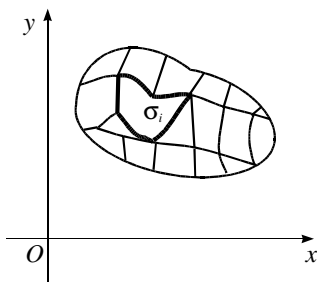


Рис.10.3.

2-й способ. Разобьём область G на n меньших замкнутых частичных областей $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, пересекающихся только по границам (рис.10.3). Совокупность этих частичных областей называется *разбиением T области G* . Площадь области σ_i обозначим $\Delta \sigma_i$. Диаметр частичной области σ_i называется число λ_i , равное

расстоянию между двумя наиболее удалёнными друг от друга точками σ_i , а диаметром разбиения T – число $\lambda_T = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$. *Двумерной интегральной суммой*, соответствующей разбиению T , называется число

$V_T = \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta \sigma_i$, где P_i – произвольные точки из областей σ_i . *Двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области G называется число

$$\iint_G f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda_T \rightarrow 0} V_T(f).$$

Отметим принципиальные сложности определения двойного интеграла по 1-му и 2-му способам.

В 1-м способе в интегральной сумме не учитывались прямоугольники второго вида, имеющие общие точки с областью G . Тем самым неявно предполагалось, что при измельчении разбиения сумма площадей прямоугольников второго вида стремится к нулю, т.е. кривая, ограничивающая область G , имеет *нулевую площадь*. Любая ли кривая имеет нулевую площадь – вопрос нетривиальный. *Далее везде считается, что кривые, ограничивающие область интегрирования, имеют нулевую площадь*. Области с нулевой площадью границы называются *квадрируемыми*.

Во 2-м способе принципиальная сложность заключается в том, как вычислить площадь каждого участка σ_i , если G разбивается на участки *произвольной* формы. Например, из школьного курса геометрии мы помним, что установление формулы вычисления площади круга уже потребовало непростых рассуждений.

Отметим, что обозначение $\iint_G f(x, y) dx dy$ соответствует разбиению

области G на прямоугольники, а обозначение $\iint_G f(x, y) d\sigma$ – на части

произвольной формы. Выражение $dx dy$ называют *элементом (дифференциалом) площади* для первого обозначения, $d\sigma$ – для второго.

Как и в случае прямоугольной области, верно утверждение: *всякая функция $f(x, y)$, непрерывная в замкнутой ограниченной квадратируемой области G , интегрируема на G* , т.е. существует $\iint_G f(x, y) dx dy$.

3. Свойства двойного интеграла

Двойные интегралы обладают свойствами, аналогичными свойствам определённого интеграла. Ниже приведены некоторые из них. Все встречающиеся ниже функции считаются непрерывными на рассматриваемых областях и их границах.

1-е свойство (линейность). Для любых чисел α, β

$$\iint_G (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dx dy = \alpha \iint_G f(x, y) dx dy + \beta \iint_G g(x, y) dx dy.$$

2-е свойство (аддитивность). Если область G разбита на две подобласти G_1 и G_2 , пересекающиеся только по общей границе, то

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G_1} f(x, y) dx dy + \iint_{G_2} f(x, y) dx dy.$$

3-е свойство (сохранение знака неравенства). Если $f(x, y) \leq g(x, y)$ на G , то

$$\iint_G f(x, y) dx dy \leq \iint_G g(x, y) dx dy.$$

4-е свойство (теорема о среднем). Если область G – связная, то существует точка $P \in G$ такая, что $\iint_G f(x, y) dx dy = f(P) |G|$, где $|G|$ означает площадь G .

4. Геометрическая и физическая интерпретация двойного интеграла

Если $f \equiv 1$, то из определения двойного интеграла следует, что интеграл $\iint_G dx dy$ равен площади фигуры G .

Пусть функция $f > 0$ на G и не обязательно равна единице.

Дадим сначала геометрическую трактовку двойного интеграла. График функции $z = f(x, y)$ задаёт некоторую поверхность S . Рассмотрим тело, называемое иногда *цилиндрическим телом*, ограниченное сверху поверхностью S , снизу фигурой G , лежащей в плоскости Oxy , с боков цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz , а направляющая есть граница области G (рис.10.4).

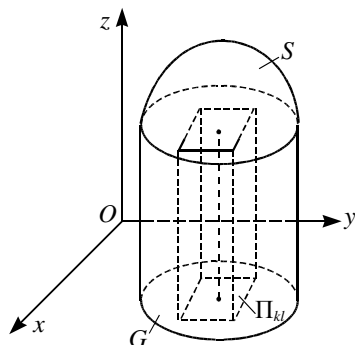


Рис.10.4

В двумерной интегральной сумме (10.1) слагаемое $f(P_{kl})\Delta x_k \Delta y_l$ означает объём параллелепипеда, основание которого есть прямоугольник $\Pi_{kl} = [x_k; x_{k+1}] \times [y_l; y_{l+1}]$, а высота равна значению функции в точке P_{kl} (см. рис.10.4). Вся интегральная сумма равна объёму «ступенчатого» тела, составленного из таких параллелепипедов. При измельчении разбиения объём ступенчатого тела всё точнее приближает объём цилиндрического тела. Перейдя к пределу при $\lambda_T \rightarrow 0$, получим *геометрическую интерпретацию двойного интеграла* $\iint_G f(x, y) dx dy$: он равен объёму V цилиндрического тела, изображённого на рис.10.4.

Если $f(x, y)$ рассматривать как плотность распределения масс на плоской фигуре G , то слагаемое $f(P_{kl})\Delta x_k \Delta y_l$ приближённо равно массе участка Π_{kl} фигуры, а вся интегральная сумма приближённо равна массе всей фигуры. Перейдя к пределу при $\lambda_T \rightarrow 0$, получим *механическую интерпретацию двойного интеграла* $\iint_G f(x, y) dx dy$: он равен массе плоской фигуры G с плотностью распределения масс $f(x, y)$.

10.2. Вычисление двойного интеграла

Основным способом вычисления двойного интеграла является сведение его к *повторному интегралу*. Пусть область G ограничена непрерывными кривыми $y = y_1(x) \leq y = y_2(x)$, $a \leq x \leq b$ (рис.10.5). Тогда

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (10.2)$$

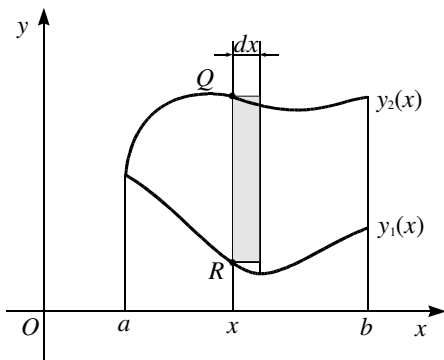


Рис.10.5.

В правой части формулы (10.2) сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной y , а затем полученный результат интегрируется по переменной x . Во внутреннем интеграле переменная x принимается за постоянную. При постоянном значении аргумента x из промежутка $[a; b]$ переменная y во внутреннем интеграле изменяется от $y_1(x)$ до $y_2(x)$.

Поэтому кривую $y = y_1(x)$ называют *линией входа в область интегрирования*, а кривую $y = y_2(x)$ – *выхода из неё*.

Поясним справедливость формулы (10.2) следующими рассуждениями.

Пусть $f(x, y)$ означает плотность распределения масс пластинки G . Тогда, как было отмечено выше, её масса равна двойному интегралу $\iint_G f(x, y) dx dy$. С другой стороны, массу пластинки можно найти и следующим способом. Возьмём произвольную точку $x \in [a; b]$ на оси абсцисс, зафиксируем её и проведём через неё прямую, параллельную оси ординат. Пусть отрезок $[R; Q]$ есть пересечение прямой и пластинки (см. рис.10.5). Линейная плотность распределения масс на отрезке

$[R; Q]$ равна $\rho(y) = f(x, y)$. Ордината точки R (точка входа в область для выбранного значения переменной x) есть число $y_1(x)$, а точки Q (точки выхода из области для выбранного значения переменной x) – число $y_2(x)$. Следовательно (см. пример 7.9), масса отрезка $[R; Q]$

равна интегралу $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$. Тогда масса узкой полоски шириной

dx будет равна $dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$, а сумма масс всех полосок –

$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$. Так как значение массы пластинки не зависит от

способа её вычисления, то заключаем, что верна формула (10.2).

Если G ограничена непрерывными кривыми $x = x_1(y) \leq x = x_2(y)$, $c \leq y \leq d$, то двойной интеграл можно записать в виде другого повторного интеграла:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (10.3)$$

Следует иметь в виду, что выбор порядка интегрирования может влиять на трудоёмкость вычисления интеграла.

Для прямоугольника Π со сторонами, параллельными осям координат, формулы (10.2), (10.3) приобретают наиболее простой вид

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

Формула (10.2) (соответственно (10.3)) применима к области, для которой прямые, проходящие через её внутренние точки параллельно оси Oy (оси Ox), пересекают границу области ровно в двух точках. Такую область назовём *правильной*. Для областей, не удовлетворяющих этому требованию, область интегрирования сначала разбивают на несколько правильных областей, а затем применяют формулы (10.2) или (10.3) к каждой области. Например, интеграл по кольцу, ограниченному

окружностями $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ (рис.10.6), нужно разбить на

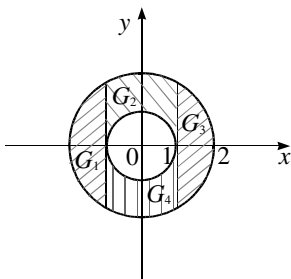


Рис.10.6.

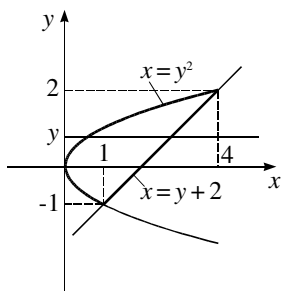


Рис.10.7.

сумму четырёх двойных интегралов по областям G_1 , G_2 , G_3 , G_4 , если внешнее интегрирование выполняется по x , а внутреннее по y .

Пример 10.1. Вычислить $\iint_G y dx dy$,

если область G ограничена линиями $y^2 = x$, $x - y = 2$.

◀Изобразим область интегрирования (рис.10.7). Выберем следующий порядок интегрирования: внутренний интеграл по x , а внешний – по y . Переменная y изменяется от $y = -1$ до $y = 2$. При фиксированном $y \in [-1; 2]$ точка входа в область интегрирования лежит на линии $x = y^2$, а выхода – на линии $x = y + 2$. Следовательно,

$$\iint_G y dx dy = \int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y+2} y dx = \int_{-1}^2 y(y+2-y^2) dy = 2,25.$$

Если внешнее интегрирование выполнять по переменной x , то двойной интеграл пришлось бы представить в виде суммы двух повторных интегралов:

$$\iint_G y dx dy = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} y dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} y dy,$$

так как на промежутке $0 \leq x \leq 1$ точки входа в область G лежат на кривой $y^2 = x$, а для $1 \leq x \leq 4$ – на прямой $x - y = 2$. ►

10.3. Двойной интеграл в полярных координатах

При вычислении определённых интегралов целью замены переменной интегрирования является изменение подынтегрального выражения к виду, более удобному для интегрирования. В случае кратных интегралов целью замены переменных интегрирования может быть упрощение перехода от кратного интеграла к повторному интегралу. Рассмотрим некоторые наиболее часто используемые замены переменных в кратных интегралах.

Пусть нужно вычислить $\iint_G f(x, y) dx dy$. В этом обозначении об-

щепринято считать, что область G задана в декартовых координатах (x, y) .

Зададим на плоскости полярные координаты (r, φ) , выбрав, как обычно, за полюс начало декартовых координат, а за полярную ось — ось абсцисс. Тогда полярные и декартовы координаты точки связаны соотношениями: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ (см. формулы (8.1)).

Выше, в подразд. 10.1, указывалось, что интегральные суммы, пределом которых и является двойной интеграл, можно строить различными способами.

Разобьём область интегрирования на частичные области *координатными линиями* полярной системы координат: $r = r_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$,

$\varphi = \varphi_j$, $j = 0, 1, 2, \dots, m$. Линии

$r = r_i$ — это окружности с центром

в полюсе; а $\varphi = \varphi_j$ — лучи, исхо-

дящие из полюса. Частичными

областями σ_{ij} будут криволиней-

ные четырёхугольники, ограни-

ченные дугами окружностей и

отрезками лучей (рис.10.8). Инте-

гральной суммой, соответствующей этому разбиению, будет сум-

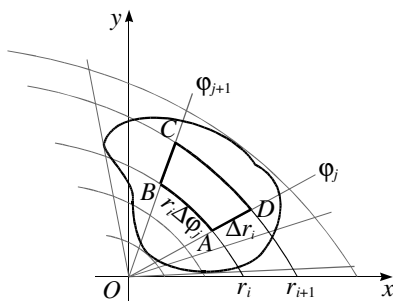


Рис.10.8.

ма вида $V_T = \sum f(P_{ij})\Delta\sigma_{ij}$, где точки $P_{ij} = (u_{ij}, v_{ij}) \in \sigma_{ij}$, а $\Delta\sigma_{ij}$ – площади областей σ_{ij} и суммирование распространено на σ_{ij} , *целиком* входящие в G .

Найдём площадь одной частичной области σ_{ij} (см. рис.10.8). Длина дуги AB равна $r_i\Delta\varphi_j$, а отрезков AD и BC – Δr_i . При малых Δr_i и $\Delta\varphi_j$ площадь криволинейного четырёхугольника σ_{ij} будет совпадать с точностью до бесконечно малых более высокого порядка малости, чем произведение $\Delta r_i\Delta\varphi_j$, с площадью прямоугольника со сторонами $r_i\Delta\varphi_j$ и Δr_i , т.е. с числом $r_i\Delta r_i\Delta\varphi_j$.

Заменим в интегральной сумме V_T площадь $\Delta\sigma_{ij}$ на $r_i\Delta r_i\Delta\varphi_j$, а декартовы координаты (u_{ij}, v_{ij}) – их выражениями в полярных координатах: $u_{ij} = r_i \cos \varphi_j$, $v_{ij} = r_i \sin \varphi_j$ (считаем, что за точки P_{ij} были выбраны вершины A криволинейных четырёхугольников). Получим сумму $V_T^* = \sum f(r_i \cos \varphi_j, r_i \sin \varphi_j) r_i \Delta r_i \Delta\varphi_j$, являющуюся интегральной суммой для функции $f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)r$ по переменным r и φ . Переходя к пределу при измельчении разбиения, выводим формулу преобразования двойного интеграла при замене декартовых координат полярными:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_G f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi. \quad (10.4)$$

В формуле (10.4) выражение $r dr d\varphi$ есть элемент площади в полярных координатах при разбиении области интегрирования окружностями $r = \text{const}$ и лучами $\varphi = \text{const}$.

Переход к полярным координатам в двойном интеграле наиболее эффективен, если область интегрирования ограничена окружностями с центром в полюсе и лучами, выходящими из полюса.

Пример 10.2. Вычислить $\iint_G 8x^2 dx dy$, если область G есть

кольцо, ограниченное окружностями $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$.

◀Область интегрирования изображена на рис.10.6. Для вычисления интеграла в декартовых координатах область интегрирования, как отмечалось выше, нужно было бы разбить на четыре подобласти. Перейдём к полярным координатам. Уравнения окружностей: $r=1$ и $r=2$. Следовательно, переменная r изменяется от 1 до 2. Угол φ не зависит от r и изменяется от 0 до 2π . Таким образом,

$$\begin{aligned}\iint_G 8x^2 dx dy &= \iint_G 8r^2 \cos^2 \varphi r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_1^2 8r^3 dr = 30 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= 15 \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = 30\pi. \blacktriangleright\end{aligned}$$

Используя переход к полярным координатам, вычислим несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$, называемый *интегралом Пуассона*^{*} и играющий важную роль в теории вероятностей.

Рассмотрим несобственный двойной интеграл $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy$.

По аналогии с определением несобственного интеграла от функции одной переменной положим

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{G_R} e^{-x^2-y^2} dx dy,$$

где G_R — часть круга радиуса R с центром в начале координат, расположенная в первой четверти. Интеграл по области G_R легко вычисляется в полярных координатах:

$$\iint_{G_R} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R e^{-r^2} r dr = \int_0^{\pi/2} d\varphi \left(-\frac{e^{-r^2}}{2} \Big|_0^R \right) = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}).$$

^{*} Пуассон Симеон Дени (1781–1840) — французский математик.

Отсюда,

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}) = \frac{\pi}{4}.$$

Интуитивно ясно, что для неотрицательной подынтегральной функции $e^{-x^2-y^2}$ справедливо равенство

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{a \rightarrow +\infty} \iint_{\Pi_a} e^{-x^2-y^2} dx dy,$$

где Π_a – квадрат $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, также расположенный в первой четверти. Записывая интеграл по квадрату как повторный и учитывая, что значение определённого интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, получим:

$$\iint_{\Pi_a} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^a e^{-x^2} dx \int_0^a e^{-y^2} dy = \left(\int_0^a e^{-x^2} dx \right)^2 \rightarrow \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2,$$

если $a \rightarrow +\infty$.

Таким образом, $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$ и, в силу чётности функции e^{-x^2} ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (10.5)$$

10.4. Площадь поверхности

Пусть в трёхмерном пространстве в декартовой системе координат поверхность S задана явным уравнением $z = f(x, y)$ и необходимо найти её площадь. Предположим, что G – проекция поверхности S на плоскость Oxy (рис.10.9) – есть ограниченная замкнутая область, а функция $f(x, y)$ имеет на G непрерывные частные производные $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$.

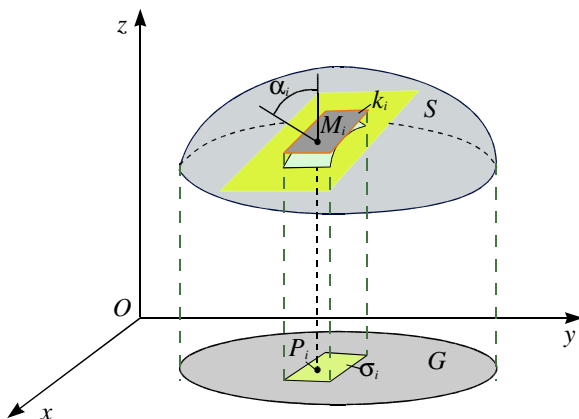


Рис.10.9.

Разобьём область G на n участков σ_i . На участке σ_i возьмём точку $P_i = (x_i, y_i)$ и построим касательную плоскость к поверхности S в точке $M_i = (x_i, y_i, f(P_i))$

$$z - f(P_i) = f'_x(P_i)(x - x_i) + f'_y(P_i)(y - y_i). \quad (10.6)$$

Прямая, параллельная оси Oz и передвигаемая по точкам контура участка σ_i , вырежет из касательной плоскости кусок k_i . Площадь этого *плоского* куска обозначим Δk_i . Выполним такую операцию для всех

участков σ_i . Сумма $S_n = \sum_{i=1}^n \Delta k_i$ площадей всех кусков k_i будет при-

ближением площади поверхности S , а предел $\lim_{\lambda_T \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta k_i$, где λ_T – максимальный из диаметров участков σ_i , естественно назвать *площадью поверхности* S .

Найдём формулу для вычисления площади поверхности. Обозначим через α_i угол между касательной плоскостью к S в точке M_i и плоскостью Oxy .

По формуле из стереометрии площади плоских фигур k_i и σ_i связаны равенством $\Delta k_i = \frac{\Delta \sigma_i}{|\cos \alpha_i|}$ (см. рис.10.9), где α_i – угол между век-

тором нормали к касательной плоскости и осью Oz . Из уравнения (10.6) следует, что за вектор нормали можно взять вектор с координатами $(f'_x(P_i), f'_y(P_i), -1)$. Следовательно, $|\cos \alpha_i| = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(P_i) + f'^2_y(P_i)}}$

и тогда $\Delta k_i = \sqrt{1 + f'^2_x(P_i) + f'^2_y(P_i)} \Delta \sigma_i$. Подставим последнее выражение в сумму S_n :

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'^2_x(P_i) + f'^2_y(P_i)} \Delta \sigma_i.$$

Эта сумма будет интегральной для функции двух переменных $\sqrt{1 + f'^2_x(x) + f'^2_y(y)}$ по области G . Её предел равен двойному интегралу от этой функции по области G . Таким образом, окончательно получаем формулу для вычисления площади поверхности S

$$S = \iint_G \sqrt{1 + f'^2_x(x) + f'^2_y(y)} dx dy. \quad (10.7)$$

Пример 10.3. Найти площадь части поверхности цилиндра $x^2 + z^2 = 1$, вырезаемой цилиндром $x^2 + y^2 = 1$, принадлежащей первому октанту.

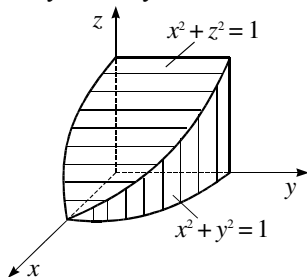


Рис.10.10.

◀Осью цилиндра $x^2 + z^2 = 1$ является ось Oy . Искомая часть его поверхности, которую вырезает цилиндр $x^2 + y^2 = 1$, изображена на рис.10.10. Итак, уравнение поверхности есть $z = \sqrt{1 - x^2}$, а область интегрирования – проекция части поверхности, вырезаемой цилиндром $x^2 + y^2 =$

$=1$, – четверть круга: $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Подставляя в формулу

$$(10.7) \quad z'_x = \frac{x^2}{1-x^2} \text{ и } z'_y = 0, \text{ найдём:}$$

$$\begin{aligned} S &= \iint_G \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dy = \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} \bigg|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= \int_0^1 dx = 1. \blacktriangleright \end{aligned}$$

10.5. Тройной интеграл

Определения тройного интеграла как по параллелепипеду $\Pi = [a; b] \times [c; d] \times [p; q]$, так и в более общем случае по трёхмерному телу (области) Ω , полностью аналогичны определениям двойного интеграла по прямоугольнику и, соответственно, плоской области G . При этом в случае тела Ω естественно считать, что *поверхность, ограничивающая тело, имеет нулевой объём*. Свойства тройного интеграла $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ также аналогичны свойствам двойного интеграла.

Как и для двойного интеграла, тройной интеграл по параллелепипеду (телу Ω) существует, если функция непрерывна на параллелепипеде (на Ω), включая его границу.

Тройной интеграл $\iiint_{\Omega} dx dy dz$ равен объёму тела Ω . Механиче-

ская трактовка тройного интеграла $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ – масса тела

Ω с объёмной плотностью распределения масс $f(x, y, z)$.

Для тройных интегралов имеет место следующая формула перехода к повторным интегралам

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_G dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (10.8)$$

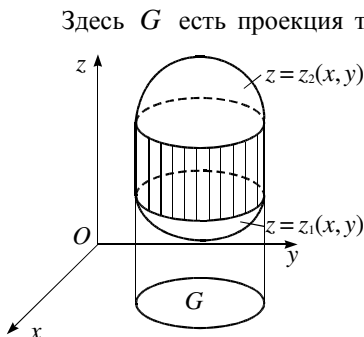


Рис.10.11.

Здесь G есть проекция трёхмерной замкнутой ограниченной области Ω на плоскость Oxy , $z = z_1(x, y)$ – уравнение поверхности, ограничивающее область Ω снизу, $z = z_2(x, y)$ – сверху (рис.10.11). При этом считаем, что любая прямая, проходящая через внутреннюю точку $(x, y) \in G$, пересекает границу Ω ровно в двух точках: нижней (точка входа в область Ω) с координатами $(x, y, z_1(x, y))$ и верхней (точка выхода из области Ω) с координатами

$(x, y, z_2(x, y))$.

Механическое обоснование формулы (10.8) может быть сделано так же, как и механическое обоснование формулы (10.2). Берём точку $(x, y) \in G$. Проведя через неё вертикальную прямую, получим отрезок, координаты концов которого $(x, y, z_1(x, y))$ и $(x, y, z_2(x, y))$. Масса

этого отрезка равна $\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$. Тогда произведение

$dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$ будет означать массу «столбика» с площадью

основания $dx dy$. Сумма масс всех столбиков равна интегралу

$\iint_G dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$ и она должна совпадать с массой фигуры,

равной $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$.

Если область G правильная в направлении оси Oy , то двойной интеграл слева в формуле (10.8) можно заменить повторным (см. (10.2)) и получится формула

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Последнее равенство имеет наиболее простой вид в случае параллелепипеда Π с рёбрами, параллельными осям координат:

$$\iiint_{\Pi} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_p^q f(x, y, z) dz.$$

Пример 10.4. Вычислить объём части параболоида $z = x^2 + y^2$, отсечённой плоскостью $z = 4$.

◀ Тело изображено на рис.10.12. По формуле (10.8) его объём равен

$$V = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iint_G dx dy \int_{x^2+y^2}^4 dz = \iint_G (4 - x^2 - y^2) dx dy.$$

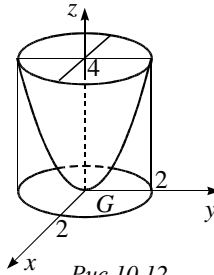


Рис.10.12.

Область G , проекция трёхмерной области интегрирования Ω на плоскость Oxy , есть круг $x^2 + y^2 \leq 4$. Перейдём в двойном интеграле к полярным координатам:

$$V = \iint_G (4 - r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi) r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (4 - r^2) r dr = 8\pi. \blacktriangleright$$

10.6. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах

1. Тройной интеграл в цилиндрических координатах

Пусть в пространстве задана декартова система координат $Oxyz$.

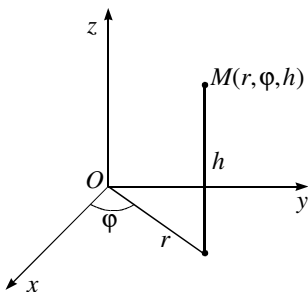


Рис.10.13.

Цилиндрическими координатами точки M называются три числа – r , φ , h , где r и φ – полярные координаты проекции точки M на плоскость Oxy (полюс совпадает с точкой Oxy , а полярная ось – с осью Ox), а h – по-прежнему аппликата точки M (рис.10.13). Очевидно, что цилиндрические и декартовы координаты точки связаны соотношениями: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = h$.

Формула замены декартовых координат на цилиндрические в тройном интеграле имеет вид

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) r dr d\varphi dh. \quad (10.9)$$

Здесь выражение $r dr d\varphi dh$ есть элемент объёма в цилиндрических координатах.

Обоснование формулы (10.9) подобно обоснованию формулы (10.3) перехода к полярным координатам в двойном интеграле. Необходимо только вывести выражение для элемента объёма в цилиндрических координатах. Наглядно вывод получается следующим образом.

Координатными поверхностями для цилиндрической системы координат являются: цилиндрические поверхности $r = \text{const}$ с осью Oz ; полуплоскости $\varphi = \text{const}$, проходящие через ось Oz ; плоскости $h = \text{const}$, параллельные плоскости Oxy . Построим координатные поверхности $r = \rho$, $r = \rho + d\rho$, $\varphi = \theta$, $\varphi = \theta + d\theta$, $h = l$, $h = l + dh$ (рис.10.14). Объём пространства, ограниченный этими поверхностями, с точностью до бесконечно малых высшего порядка совпадает с объёмом

прямой призмы, основанием которой является прямоугольник со сторонами $\rho d\theta$ и $d\rho$ (см. рис.10.8), а высота равна dh . Таким образом, элемент объёма в цилиндрических координатах равен $\rho d\theta d\rho dh$.

Пример 10.5. Найти массу тела Ω , ограниченного конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и плоскостью $z = 2$ (рис.10.15), если объёмная плотность распределения масс равна $\rho = z$.

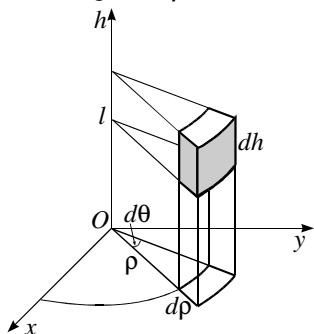


Рис.10.14.

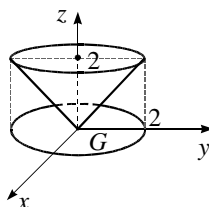


Рис.10.15.

◀Масса $m = \iiint_{\Omega} z dx dy dz$. Перейдём к цилиндрическим координатам.

В этих координатах уравнение конуса $h = r$, объёмной плотности — $\rho = h$, а проекции G тела Ω на плоскость Oxy — круг $r \leq 2$. Таким образом,

$$m = \iint_G r dr d\varphi \int_r^2 h dh = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r \left(2 - r^2 / 2 \right) dr = 2\pi \left(r^2 - r^4 / 8 \right) \Big|_0^2 = 4\pi. \blacktriangleright$$

2. Тройной интеграл в сферических координатах

Снова будем рассматривать декартову систему координат в пространстве. Для произвольной точки M обозначим через P её проекцию на плоскость Oxy . *Сферическими координатами* (говорят также *полярными координатами в пространстве*) точки M называются три числа: r , φ , θ , где r — расстояние точки M до начала O декартовой системы координат; φ — угол между радиусом-вектором $\vec{OP}$ и положи-

тельным направлением оси Ox ; θ – угол между радиусами-векторами

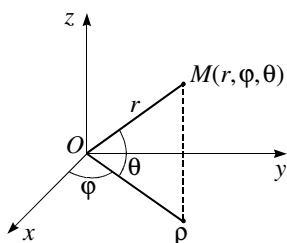


Рис.10.16.

$\vec{OM}$ и $\vec{OP}$ (рис.10.16). Далее будем считать, что угол φ отсчитывается против часовой стрелки и его значения лежат в промежутке $[0; 2\pi)$, а значения угла θ принадлежат отрезку $[-\pi/2; \pi/2]$. Положительные значения угла θ отвечают точкам, лежащим над плоскостью Oxy .

Декартовы и сферические координаты точки связаны соотношениями:

$$x = r \cos \theta \cos \varphi, \quad y = r \cos \theta \sin \varphi, \quad z = r \sin \theta.$$

Координатными поверхностями для сферической системы будут: сферы $r = \text{const}$; полуплоскости $\varphi = \text{const}$, проходящие через ось Oz ; конусы $\theta = \text{const}$ с вершиной в начале координат.

Формула перехода в тройном интеграле к сферическим координатам записывается так:

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \iiint_{\Omega} f(r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta) r^2 \cos \theta dr d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

Здесь $r^2 \cos \theta dr d\varphi d\theta$ – элемент объёма, ограниченный «близкими» координатными поверхностями сферической системы координат. Обоснование приведённого выражения для элемента объёма проводится так же, как и для случая цилиндрической системы координат.

10.7. Замена переменных в кратных интегралах в общем случае

Пусть задан двойной интеграл $\iint_G f(x, y) dx dy$. Предположим, что координаты x, y являются функциями новых переменных u и v :

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \phi(u, v), \quad (u, v) \in G', \quad (10.10)$$

причём функции $\varphi(u, v)$, $\phi(u, v)$ имеют непрерывные частные производные в некоторой области G' и задают взаимно-однозначное отображение G' на G . Тогда

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G'} f(\varphi(u, v), \phi(u, v)) |I(u, v)| du dv, \quad (10.11)$$

где $I(u, v) = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \phi'_u & \phi'_v \end{vmatrix}$ – определитель Якоби (называемый также яко-

бианом) отображения (10.10). Подчеркнём, что в формуле (10.11) определитель берётся по абсолютной величине.

Произведение $|I(u, v)| du dv$ есть элемент площади в криволинейных координатах u и v . Например, для полярных координат $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ на плоскости $I(r, \varphi) =$

$$= \begin{vmatrix} (r \cos \varphi)'_r & (r \cos \varphi)'_\varphi \\ (r \sin \varphi)'_r & (r \sin \varphi)'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \quad \text{и} \quad |I(r, \varphi)| dr d\varphi = r dr d\varphi,$$

что совпадает с выражением для элемента площади в полярных координатах, полученным нами ранее другим путём.

Если функции $x = \varphi(u, v, w)$, $y = \phi(u, v, w)$, $z = \lambda(u, v, w)$ имеют непрерывные частные производные в области Ω' и задают взаимно-однозначно отображение Ω' на Ω , то

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \iiint_{\Omega'} f(\varphi(u, v, w), \phi(u, v, w), \lambda(u, v, w)) |I(u, v, w)| du dv dw. \end{aligned}$$

Здесь якобиан отображения $I(u, v, w) = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v & \varphi'_w \\ \phi'_u & \phi'_v & \phi'_w \\ \lambda'_u & \lambda'_v & \lambda'_w \end{vmatrix}$. Нетрудно вы-

числить, что для цилиндрической системы координат $I = r$, а для сферической – $I = r^2 \cos \theta$.

Литература

1. **Бугров Я.С., Никольский С.М.** Высшая математика: учебник для вузов: в 3 т. – М.: Дрофа, 2010. – Т. 2.
2. **Иваиёв-Мусатов О.С.** Начала математического анализа. – СПб.: Лань, 2009.
3. **Ильин В.А., Позняк Э.Г.** Основы математического анализа: в 2 ч. – М.: Физматлит, 2014, 2009. – Ч. 1; Ч. 2.
4. **Шипачев В.С.** Высшая математика. – М.: Высшая школа, 2010.

Содержание

Предисловие	3
1. Действительные и комплексные числа. Функции	5
1.1. Действительные числа. Свойства действительных чисел	5
1.2. Понятие функции. Способы задания функции	10
1.3. Основные элементарные функции. Элементарные функции	15
1.4. Комплексные числа	20
2. Предел и непрерывность	32
2.1. Предел последовательности. Свойства сходящихся последовательностей	32
2.2. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности	38
2.3. Арифметические действия над сходящимися последовательностями	42
2.4. Неопределённые выражения	44
2.5. Существование предела последовательности	46
2.6. Число e	48
2.7. Предел функции в точке	50
2.8. Замечательные пределы	60
2.9. Сравнение бесконечно малых функций	65
2.10. Непрерывность функций	68
2.11. Свойства непрерывных на отрезке функций	75
2.12. Равномерная непрерывность	78
3. Производные и дифференциалы	81
3.1. Понятие производной	81
3.2. Вычисление производных	86
3.3. Дифференциал	94
3.4. Дифференцирование параметрически заданных и неявных функций	101
4. Основные теоремы о дифференцируемых функциях	105
4.1. Теоремы о среднем	105
4.2. Раскрытие неопределённостей. Правило Лопиталя	110
4.3. Формула Тейлора	113
5. Исследование и построение графиков функций	123
5.1. Достаточные условия постоянства и монотонности	123

5.2. Необходимые и достаточные условия существования экстремумов	124
5.3. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.....	128
5.4. Выпуклость графика функции. Точки перегиба.....	129
5.5. Асимптоты	132
5.6. Схема исследования и построения графиков функций	134
5.7. Методы численного решения уравнений.....	136
6. Неопределённый интеграл	140
6.1. Понятие неопределённого интеграла и его свойства.....	140
6.2. Таблица основных неопределённых интегралов.....	143
6.3. Методы интегрирования.....	145
6.4. Интегрирование рациональных дробей	150
6.5. Интегрирование иррациональных и тригонометрических выражений	157
6.6. Интегрирование дробно-линейных и квадратичных иррациональностей.....	159
7. Определённый интеграл	162
7.1. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции.....	162
7.2. Понятие определённого интеграла	163
7.3. Свойства определённого интеграла.....	166
7.4. Формула Ньютона – Лейбница	170
7.5. Методы интегрирования для определённого интеграла.....	173
7.6. Несобственные интегралы	175
7.7. Приближённое вычисление определённых интегралов	186
8. Приложения интегрального исчисления	191
8.1. Вычисление площадей плоских фигур.....	191
8.2. Объём тела вращения	195
8.3. Длина дуги плоской кривой	196
8.4. Площадь поверхности вращения	200
8.5. Схема применения определённого интеграла	201
8.6. Кривизна	204
9. Функции многих переменных	206
9.1. Понятие функции многих переменных	206
9.2. Предел и непрерывность функции многих переменных	210
9.3. Частные производные	213
9.4. Дифференцируемость функции многих переменных	217
9.5. Производная сложной функции. Производная неявной функции.....	222
9.6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности	225

9.7. Производная по направлению. Градиент	228
9.8. Формула Тейлора для функции многих переменных	231
9.9. Экстремумы функции многих переменных	233
9.10. Условный экстремум	239
10. Кратные интегралы	242
10.1. Понятие двойного интеграла	242
10.2. Вычисление двойного интеграла	248
10.3. Двойной интеграл в полярных координатах.....	251
10.4. Площадь поверхности.....	254
10.5. Тройной интеграл.....	257
10.6. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах.....	260
10.7. Замена переменных в кратных интегралах в общем случае ...	262
Литература.....	264

Учебное издание

***Кальней** Сергей Григорьевич*

**Математический анализ. Часть 1: Дифференциальное и интегральное
исчисления функций одной и многих переменных**

Редактор *Н.А. Кузнецова*. Технический редактор *Л.Г. Лосякова*. Корректор
Л.Г. Лосякова. Верстка автора.

Подписано в печать с оригинал-макета 12.12.2014. Формат 60×84 1/16. Печать
офсетная. Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 15,54.
Уч.-изд. л. 13,4. Тираж 400 экз. Заказ 84.

Отпечатано в типографии ИПК МИЭТ.
124498, Москва, Зеленоград, проезд 4806, д. 5, МИЭТ.